

A bűvös négyzet

Kollár Zoltán
Herman Ottó Gimnázium

Mi is az a bűvös négyzet? Az egy olyan négyzet, melynek sorainak, oszlopainak és átlóinak összege mindig ugyanaz a szám. Ez a **bűvös szám**. Ha az oszlopok számát **n**-nek tekintjük, akkor egy egyszerű képlettel kiszámíthatjuk a bűvös szám értékét.

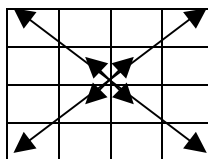
$$[n(n^2+1)]/2$$

Már i.e. 2200 körül elkészítették az első ilyen négyzetet Kínában a Sárga-folyó partjánál. Egy teknőspáncélon fekte és fehér láncba szedett csomók egy 3×3-as négyzetet alkottak (ld. ábra). A fehér csomók a páratlan, a feketék a páros számokat jalezték. A 9.sz.-ban az arabok is használták őket, de asztrológiai célra. Az első kimondottan a bűvös négyzetekre irányuló tanulmányt a görög tudós, Moschopoulos végezte i.sz. 1300 körül. Munkássága a Párizsi Nemzeti Könyvtárban tekinthető meg.

Két nagyobb csoportra oszthatjuk őket, úgy mint párosra és páratlanra.

- **Páros**

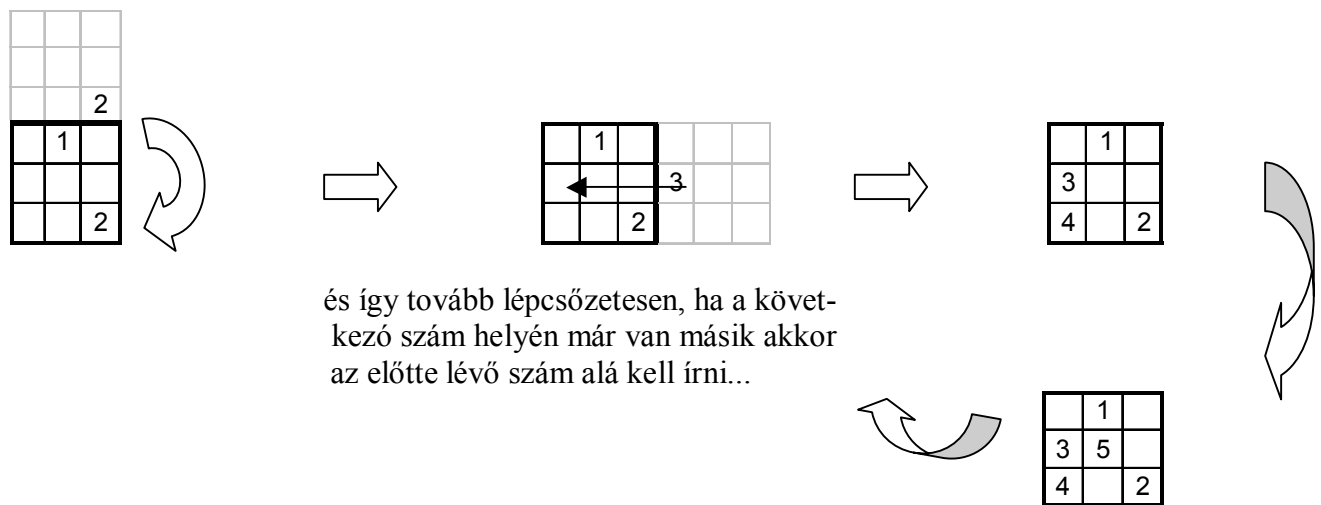
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16



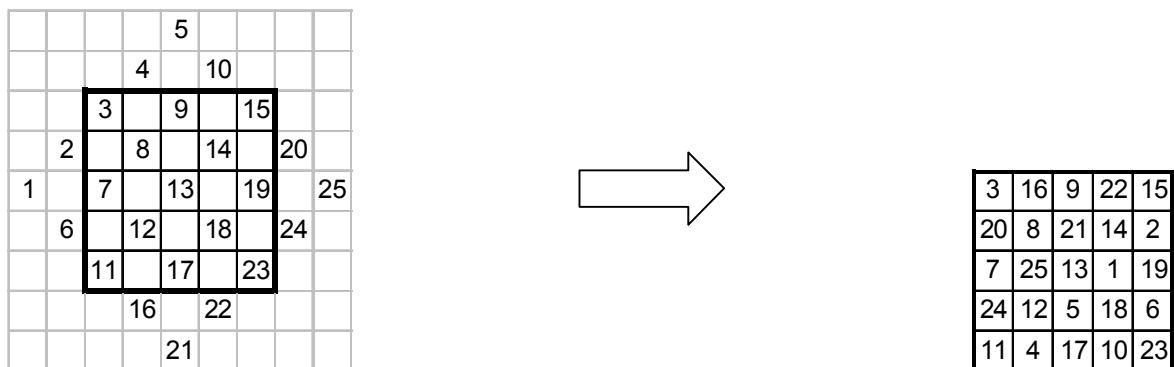
16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

- A 8×8-ast a 4×4-eshez hasznolva
- A 12×12-est fel kell bontani 4×4-esre, tehát kapunk 16 db 3×3-ast megfelelően elrendezve. Az első 3-as egységben 1-9-ig elrendezzük a számokat, majd a második 3-as egységet ugyanígy csak 10-18-ig és így tovább..
- Híres embereket is foglalkoztatták a bűvös négyzetek, például Benjamin Franklint is aki elkészítette a saját 8×8-as négyzetét (ld. ábra), amelynek az az érdekessége, hogy fel van osztva 4 db 4×4-esre. A nagy négyzet bűvös száma 260, a belső kisebbiké pedig 130.

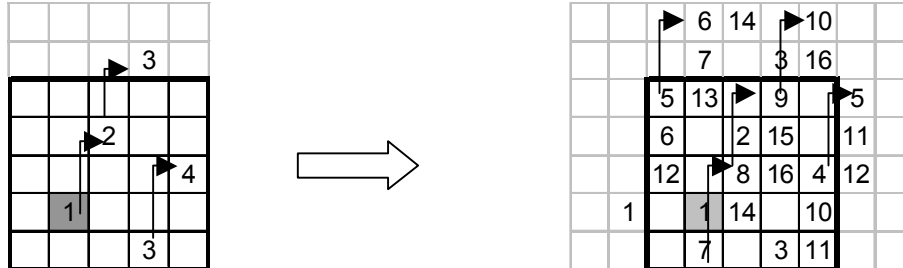
- Híratlan
- Lépcső-módszer



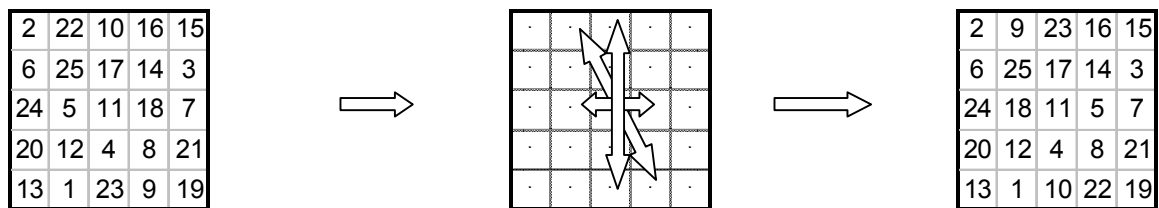
- **Piramis-módszer:**-a négyzeteken kívül eső számokat a vele szembe eső négyzeteken belüli üres helyre kell írni



- **Huszár-módszer:-** a felrajzolt négyzetünkbe tetszőlegesen beírjuk az 1-es számot, majd a sakk szabály szerint **L** lépésben rakosgatjuk le a többi számot. Ha a köv. szám már a négyzeten kívül esik akkor úgy kell venni mintha egy másik négyzet lenne ott és az ott elfoglalt helyének megfelelően kell beírni az eredeti négyzetbe. Abban az esetben, ha az foglalt akkor a zelőtte lévő szám alá kell írni.



- Albrecht Dürer *Melancolia* c. Képén is egy 5×5-ös bűvös négyzetet figyelhetünk meg (ld. ábra)
- Még mielőtt belekezdenék újabb témába előbb tisztázok néhány „alapfogalmat”. A négyzetek függőleges **oszlopokból** ($O_1, O_2, O_3, \dots$) és vízszintes **sorokból** ($S_1, S_2, S_3, \dots$). Például az S_2 és O_3 vonalak közös mezejét X_{23} -mal jelölöm. A jobbra leejtő **főátló** lesz f , a másik, a **mellékátló** lesz az m .
- A bűvös négyzetek könnyen alakíthatók például ha minden elemhez ugyanazt a számot adjuk hozzá. De ezt úgy is elérhetjük ha egyszerűen a dominókat cseréljük ki. Ilyenkor a az elemek különbségeivel kell számolnunk. Íme egy példa:



Szegélyezett bűvös négyzetek

- A szegélyezett bűvös négyzetek olyan négyzetek, melyekben egy különálló másik bűvös négyzet van, ez a **mag**. A mag számkészlete a 9-17-ig futó sorozat, és a belső bűvös szám 39. Ha a mag egy vonalát mindkét irányba meghosszabítjuk (persze 5×5 -ös négyzetről van szó) akkor kapunk egy számpárt, melyet ha összeadunk akkor az összeg minden esetben 26. Mindegyik 26-os összegű számpár a nagy négyzetnek egy szimmetrikus mezőpárját foglalja el, vagy az ábra centrumára vagy az egyik középvonalára. Minden szám beletartozik egy ilyen számpárba, a 13-as pedig az önmaga párja kiegészítője. Ezek a számpárok adják a **keretet** vagy **szegélyt**.
- De ezek csak „szabályok”, amik egy változtatás alkalmával borulnak
- Most pedig megmutatom, hogy az 5×5 -ös magjának állandója (S_3) háromszorosa a középszámnak (C). Ezt vonalak egyenleteiből számíthatjuk ki.
- A könnyebb megértés végett itt egy ábra:

X_{11}	X_{12}	X_{13}
X_{21}	X_{22}	X_{23}
X_{31}	X_{32}	X_{33}

(ez egy **mag**)

- A mellékátló egyenlete ez:

$$m = X_{13} + X_{22} + X_{31} = S_3$$

- Itt most a $X_{22} = C$, az S1 sor egyenlete:

$$S_3 = X_{11} + X_{12} + X_{13}$$

- Ennek tagjait kifejezhetjük az f, O_2 és m vonal hasonló egyenletéből:

$$X_{11} = S_3 - C - X_{33},$$

$$X_{12} = S_3 - C - X_{32},$$

$$X_{13} = S_3 - C - X_{31},$$

- Ezeket behelyettesítjük, összevonunk és az utolsó tagokat egy zárójelbe fogjuk össze:

$$S_3 = 3S_3 - 3C - (X_{33} + X_{32} + X_{31}) = 3S_3 - 3C - S_3$$

- Az utolsó lépésben fölismertük, hogy a zárójelben az S_3 vonal egyenlete áll, annak értéke is S_3 . Ebből átrendezéssel:

$$3C = S_3$$

- Most az 1,2,3,...,25 számokkal megtöltött, szegélyes négyzetből számítjuk ki a mag S_3 állandóját és a meghosszabbítások kéttagú H részösszegét. Az 5×5 -ösök bűvös állandóját S_5 -tel jelölve a magon áthaladó vonalak teljes összege ilyen:

$$S_3 + H = 65$$

- A maggal és a meghosszabbításokkal éppen megtelik a 25 mező, tehát:

$$\text{mag} + \text{szegély} = 3S_3 + 8H = 5 \cdot 65 = 325$$

- Levonva az első egyenlet 3-szorosát:

$$5H = 130, \quad H = 26 \quad \text{és} \quad S_3 = 39$$

- Eszerint minden mag állandója 39, és így minden magban középen a $C = 13$ áll. Viszont, ahogy azt már az előbb megállapítottuk ezek a szabályok könnyen borulhatnak és megváltozhat a rend.

Felhasznált könyvészet

Bakos Tibor: Ki tud többet a bűvös négyzetekről, Eötvös Lóránt Fizikai Társulat, Bp. 1998.
 Pappas Theoni: Mathematics Appreciation, Wide World Publishing/Tetra, San Carlos CA, 1997.