1. Hibaszámítás

1.1. Hibaforrások

A feladatok megoldása során különféle hibaforrásokkal találkozunk.
Modellhiba, amikor a valóságnak egy közelítését használjuk a feladat matematikai alakjának felírásához. Pl. egy fizikai törvényekkel leírt modellt.
Mérési vagy **öröklött hiba,** amikor a modell adatai a pontos értékeknek csak közelítõ értékei. Általában a mérés pontosságától függnek.
Mûveleti (**kerekítési-)** és **input hiba,** amely az adatok számítógépen való ábrázolásából adódnak. A racionális számoknak is csak egy részhalmaza ábrázolható a lebegõpontos aritmetikában. A mûveletvégzés során kerekítés, túl- illetve alulcsordulás léphet fel.
Képlethiba, amikor egy végtelen eljárást véges számú lépés után leállítunk, közelítõ algoritmusokat alkalmazunk.

1.2. A gépi számok

A számítógépek egy véges számhalmazt ábrázolnak és a számításokat is ezekkel a számokkal végzik. Leggyakrabban a lebegõpontos aritmetikát használják. Nézzük ennek a modelljét:

1.1. Definíció. Legyen $t \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$, $m = \sum_{i=1}^{t} m_i \cdot 2^{-i}$, ahol $m_1 = 1,\ m_i \in \{0,1\}\ (i = 1,2,\ldots,t)$,

ekkor az $a = \pm\left(\sum_{i=1}^{t} m_i \cdot 2^{-i}\right) \cdot 2^k = \pm m \cdot 2^k$ alakú számot normalizált lebegõpontos számnak nevezzük. A t természetes szám az m mantissza hossza, míg k a szám karakterisztikája.

Jelölés: $a = \pm[m_1 \ldots m_t |\ k]$
A gépi számok halmazát $M = M(t, k^-, k^+)$ jelöli, ahol

$$M = \left\{ a \mid a = \pm m \cdot 2^k,\ m = \sum_{i=1}^{t} m_i \cdot 2^{-i},\ m_1 = 1, m_i \in \{0,1\}\ (i = 1,2,\ldots,t),\ k^- \le k \le k^+ \right\} \cup \{0\}.$$

Következmények:
1) M -ben van legnagyobb elem, $M_\infty = [11\ldots1|\ k] = (1 - 2^{-t}) \cdot 2^{k^+}$.

2) A legkisebb pozitív szám $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \cdot 2^{k^-} = 2^{k^- - 1}$.

3) M a 0-ra szimmetrikus.

4) A normalizálás miatt $\frac{1}{2} \le m < 1$.

Hogyan feleltetünk meg egy $I\!R$ -beli számnak egy gépi számot? Ehhez definiáljuk a következõ input függvényt.

1.2. Definíció. Az $fl : I\!R \to M$ függvény input függvény, ha

$$fl(x) = \begin{cases} M_\infty\,, & \text{ha } x > M_\infty \\ -M_\infty\,, & \text{ha } x < -M_\infty \\ \text{az } x\text{ - hez legközelebb bi gépi} & \\ \text{szám a kerekítés szabályai szerint,} & \text{ha } |x| \le M_\infty \end{cases}$$

1.3. Tétel. (Input hiba)
Minden $|x| \le M_\infty$ valós szám esetén

$$|x - fl(x)| \le \begin{cases} \boldsymbol{e}_0\,, & \text{ha } |x| < \boldsymbol{e}_0 \\ \frac{1}{2}|x| \cdot 2^{1-t}\,, & \text{ha } |x| \ge \boldsymbol{e}_0 \end{cases} .$$

A képletbõl látható, hogy $|x| \le \boldsymbol{e}_0$ esetén az ábrázolt szám relatív hibája 2^{-t}, azaz csak a mantissza méretétõl függ.

Kidolgozott példák

1. **Példa.** Vizsgáljuk meg az $M = M(3,-2,2)$ gépi számok halmazát. Mennyi az elemszáma? Mekkora a legnagyobb gépi szám és a legkisebb pozitív szám?

Megoldás.
A M halmaz $a = \pm[m_1 m_2 m_3 |\ k]$ alakú számokat tartalmaz. $m_1 = 1,\ m_2, m_3 \in \{0,1\}$, tehát 4 féle mantissza lehetséges és $-2,-1,0,1,2$ lehetnek a karakterisztikák (5 féle). Így a negatív gépi számokkal együtt $2 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 41$ eleme lehet a halmaznak a 0-t is beleszámítva.

$$M_\infty = [111|\ 2] = (1 - 2^{-3}) \cdot 2^2 = \frac{7}{8} \cdot 4 = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

$$\boldsymbol{e}_0 = [100|-2] = \frac{1}{2} \cdot 2^{-2} = \frac{1}{8}$$

2. **Példa.** Keressük meg a $\boldsymbol{p}$ -nek megfeleltetett gépi számot az elõzõ feladat M halmazában.

Megoldás.
$3 = [110|\ 2] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot 2^2 \in M$ kisebb $\boldsymbol{p}$ -nél. $[111|\ 2] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \cdot 2^2 = 3{,}5 \in M$ az utána következõ gépi szám. Mivel $\boldsymbol{p} - 3 < 3{,}5 - \boldsymbol{p}$, tehát $fl(\boldsymbol{p}) = 3$.

3. Példa. Adjunk példát arra, hogy a gépi számok körében az összeadás nem asszociatív mûvelet.

Megoldás.

Pl. az elõzõ M halmazban $[110|\;2]=3$, $[100|-1]=\frac{1}{4}$.

$$fl\left(3+\frac{1}{4}\right)=[110|\;2]=3\text{, tehát } fl\left(\left(3+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\right)=[110|\;2]=3\,.$$

$$fl\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=[100|\;0]=\frac{1}{2}\text{, így } fl\left(3+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\right)=[111|\;2]=3{,}5\,.$$

1.3. A hibaszámítás elemei, az alapmûveletek és a függvényérték hibái

1.4. Definíció. A, B -vel jelöljük a pontos értékeket, a, b -vel a közelítõ értékeiket.

$\Delta a = A - a$: az a közelítõ érték abszolút hibája

$\Delta_a \geq |\Delta a| = |A - a|$: az a közelítõ érték abszolút hibakorlátja .

$\boldsymbol{d}a = \frac{\Delta a}{A} \approx \frac{A-a}{a}$: az a közelítõ érték relatív hibája

$\boldsymbol{d}_a \geq |\boldsymbol{d}a| = \left|\frac{\Delta a}{A}\right| \approx \frac{|A-a|}{|a|}$: az a közelítõ érték relatív hibakorlátja

A pontos hibát gyakran nem tudjuk meghatározni. Sokszor az is megfelel számunkra, ha a hibának egy hibakorlátját ismerjük. Elég, ha a hiba nagyságrendjét ismerjük. Igyekezzünk a példák során finoman becsülni, ne lépjünk át nagyságrendeket.

1.5. Tétel. Az alapmûveletek abszolút és relatív hibakorlátjaira a következõ képleteket kapjuk.

$$\Delta_{a+b} = \Delta_a + \Delta_b \qquad \boldsymbol{d}_{a+b} = \frac{|a|}{|a+b|}\boldsymbol{d}_a + \frac{|b|}{|a+b|}\boldsymbol{d}_b$$

$$\Delta_{a-b} = \Delta_a + \Delta_b \qquad \boldsymbol{d}_{a-b} = \frac{|a|}{|a-b|}\boldsymbol{d}_a + \frac{|b|}{|a-b|}\boldsymbol{d}_b$$

$$\Delta_{a\cdot b} = |b|\cdot\Delta_a + |a|\cdot\Delta_b \qquad \boldsymbol{d}_{a\cdot b} = \boldsymbol{d}_a + \boldsymbol{d}_b$$

$$\Delta_{\frac{a}{b}} = \left|\frac{a}{b}\right|\cdot\left(\frac{\Delta_a}{|a|}+\frac{\Delta_b}{|b|}\right) = \frac{|b|\cdot\Delta_a + |a|\cdot\Delta_b}{b^2} \qquad \boldsymbol{d}_{\frac{a}{b}} = \boldsymbol{d}_a + \boldsymbol{d}_b$$

Bizonyítás.

a) Összeadás.

Tegyük fel, hogy a, b azonos elõjelû.

$$\Delta(a+b) = (A+B) - (a+b) = (A-a) + (B-b) = \Delta a + \Delta b$$

Abszolút értéket véve, felülrõl becsülve és az abszolút hibakorlát fogalmát felhasználva
$\left|\Delta(a+b)\right| = \left|\Delta a + \Delta b\right| \le \left|\Delta a\right| + \left|\Delta b\right| \le \Delta_a + \Delta_b$, azaz $\Delta_{a+b} = \Delta_a + \Delta_b$.
Írjuk fel az összeg relatív hibájának abszolút értékét.

$$\left|\boldsymbol{d}(a+b)\right| = \frac{\left|\Delta(a+b)\right|}{|a+b|} \le \frac{|\Delta a| + |\Delta b|}{|a+b|} = \frac{|a|\cdot|\boldsymbol{d}\,a| + |b|\cdot|\boldsymbol{d}\,b|}{|a+b|} \le \max\{\boldsymbol{d}\,a, \boldsymbol{d}\,b\}\cdot\frac{|a|+|b|}{|a+b|} = \max\{\boldsymbol{d}\,a, \boldsymbol{d}\,b\}.$$

A kapott képletek azt mutatják, hogy ha a kiindulási értékek hibája kicsi, akkor az összeadás hibája is kicsi.

b) Kivonás.
Tegyük fel, hogy a, b azonos elõjelû.

$$\Delta(a-b) = (A-B) - (a-b) = (A-a) - (B-b) = \Delta a - \Delta b$$

Abszolút értéket véve, felülrõl becsülve és az abszolút hibakorlát fogalmát felhasználva
$\left|\Delta(a-b)\right| = \left|\Delta a - \Delta b\right| \le \left|\Delta a\right| + \left|\Delta b\right| \le \Delta_a + \Delta_b$, azaz $\Delta_{a-b} = \Delta_a + \Delta_b$.
Írjuk fel az összeg relatív hibájának abszolút értékét.

$$\left|\boldsymbol{d}(a-b)\right| = \frac{\left|\Delta(a-b)\right|}{|a-b|} \le \frac{|\Delta a| + |\Delta b|}{|a-b|} = \frac{|a|\cdot|\boldsymbol{d}\,a| + |b|\cdot|\boldsymbol{d}\,b|}{|a-b|}.$$

Tehát $\boldsymbol{d}_{a-b} = \frac{|a|}{|a-b|}\boldsymbol{d}_a + \frac{|b|}{|a-b|}\boldsymbol{d}_b$.

A relatív hibára kapott képletet vizsgálva azt kapjuk, hogy ha $|a-b|$ értéke sokkal kisebb, mint $|a|, |b|$, akkor a kivonás relatív hibája nagyon nagy lehet, a kiindulási értékek hibájától függetlenül. Emiatt a közeli számok kivonása kerülendõ.

c) Szorzás.

$$\Delta(a\cdot b) = A\cdot B - a\cdot b = A\cdot B - a\cdot B + a\cdot B - a\cdot b = B\cdot(A-a) + a\cdot(B-b) =$$
$$= (b+\Delta b)\cdot\Delta a + a\cdot\Delta b = b\cdot\Delta a + a\cdot\Delta b + \Delta a\cdot\Delta b$$

A $\Delta a\cdot\Delta b$ mennyiség nagyságrenddel kisebb a többi tagnál, ezért $\left|\Delta(a\cdot b)\right| \approx |b|\cdot|\Delta a| + |a|\cdot|\Delta b|$.
Az abszolút hibakorlátra $\Delta_{a\cdot b} = |b|\cdot\Delta_a + |a|\cdot\Delta_b$.

$$\left|\boldsymbol{d}(a\cdot b)\right| = \frac{\left|\Delta(a\cdot b)\right|}{|a\cdot b|} \approx \frac{|b|\cdot|\Delta a| + |a|\cdot|\Delta b|}{|a\cdot b|} = \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right| = |\boldsymbol{d}\,a| + |\boldsymbol{d}\,b|.$$

Így a relatív hibakorlátra $\boldsymbol{d}_{a\cdot b} = \boldsymbol{d}_a + \boldsymbol{d}_b$.

d) Osztás.
Tegyük fel, hogy a, b azonos nagyságrendû.

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{A}{B} - \frac{a}{b} = \frac{A\cdot b - a\cdot B}{B\cdot b} = \frac{A\cdot b - a\cdot b + a\cdot b - a\cdot B}{B\cdot b} = \frac{b\cdot\Delta a - a\cdot\Delta b}{(b+\Delta b)\cdot b} \approx$$
$$\approx \frac{b\cdot\Delta a - a\cdot\Delta b}{b^2} = \frac{a}{b}\cdot\left(\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b}\right)$$

Az abszolút hibakorlátra $\Delta_{\frac{a}{b}} = \frac{|b|\cdot\Delta_a + |a|\cdot\Delta_b}{b^2}$. Ha $|b|$ sokkal kisebb, mint $|a|$, akkor
Az abszolút hiba nagyon nagy lehet a kiindulási értékek abszolút hibájától függetlenül.

A relatív hibára $\boldsymbol{d}\left(\frac{a}{b}\right)=\dfrac{\Delta\left(\frac{a}{b}\right)}{\frac{a}{b}}=\left(\frac{\Delta a}{a}-\frac{\Delta b}{b}\right)$. Abszolút értéket véve $\left|\boldsymbol{d}\left(\frac{a}{b}\right)\right|\le\left|\frac{\Delta a}{a}\right|+\left|\frac{\Delta b}{b}\right|$,

amibõl a relatív hibakorlátra a $\boldsymbol{d}_{\frac{a}{b}}=\boldsymbol{d}_a+\boldsymbol{d}_b$ képletet kapjuk.

A függvény érték abszolút és relatív hibakorlátjára nézzük a következõ tételt.

1.5. Tétel.

a) Ha az $f:k(a)\to\mathbb{R}$ függvény differenciálható, akkor $\Delta_{f(a)}=M_1\cdot\Delta_a$,
ahol $k(a)$ az a-nak a Δ_a sugarú környezetét jelöli, $M_1=\sup\{|f'(x)|:x\in k(a)\}$.

b) Ha $f\in D^2(k(a))$, akkor $\Delta_{f(a)}=|f'(a)|\cdot\Delta_a+\frac{1}{2}M_2\cdot\Delta_a^2$, ahol
$M_2=\sup\{|f''(x)|:x\in k(a)\}$.

c) A relatív hibakorlátra $\boldsymbol{d}_{f(a)}\approx\dfrac{|f'(a)|}{|f(a)|}\cdot\Delta_a$.

Bizonyítás. A Lagrange középérték tétel miatt
$\Delta f(a)=f(A)-f(a)=f'(\boldsymbol{a})\cdot(A-a)=f'(\boldsymbol{a})\cdot\Delta a$, ahol $\boldsymbol{a}\in k(a)$.
Abszolút értéket véve és felülrõl becsülve $\Delta_{f(a)}=M_1\cdot\Delta_a$.
A Taylor-formulát felhasználva
$\Delta f(a)=f(A)-f(a)=f'(a)\cdot\Delta a+\frac{1}{2}f''(\boldsymbol{b})\cdot(\Delta a)^2$, ahol $\boldsymbol{b}\in k(a)$.

Abszolút értéket véve és felülrõl becsülve $\Delta_{f(a)}=|f'(a)|\cdot\Delta_a+\frac{1}{2}M_2\cdot\Delta_a^2$.

A relatív hibakorlátra vonatkozó állítás a Δ_a^2-es tag elhagyásával már következik.

Kidolgozott példák

1. **Példa.** Közelítsük $\boldsymbol{p}$-t a 2 tizedesjegyre kerekített értékével, azaz 3,14-el. Adjunk a közelítõ értékre abszolút és relatív hibakorlátot.

Megoldás. $\Delta 3{,}14=\boldsymbol{p}-3{,}14$ a közelítés abszolút hibája.

$|\Delta 3{,}14|\le 5\cdot 10^{-3}$ az abszolút hiba egy becslése,

$\Delta_{3,14}=5\cdot 10^{-3}$ a közelítés egy abszolút hibakorlátja.

$\boldsymbol{d}\,3{,}14=\dfrac{\boldsymbol{p}-3{,}14}{3{,}14}$ a közelítés relatív hibája,

$|\boldsymbol{d}\,3{,}14|=\dfrac{|\boldsymbol{p}-3{,}14|}{3{,}14}\le\dfrac{5\cdot 10^{-3}}{3}\le 1{,}667\cdot 10^{-3}$ a relatív hiba egy becslése,

$\boldsymbol{d}_{3,14}=1{,}667\cdot 10^{-3}=0{,}1667\ \%$ a közelítés egy relatív hibakorlátja.

2. Példa. Legyen $X = \sqrt{20001} - \sqrt{20000} = A - B$. Számoljuk ki zsebszámológépen. Becsüljük az abszolút és relatív hibáját. X -et más alakban is kiszámíthatjuk, $X = Y = \dfrac{1}{\sqrt{20001} + \sqrt{20000}} = \dfrac{1}{A+B}$. Melyik számolási mód biztosítja a kisebb hibát?

Megoldás. $a = 141{,}4248917$, $b = 141{,}4213562$,

$x = 3{,}53549 \cdot 10^{-3}$, $y = 3{,}535489713 \cdot 10^{-3}$.

Ha az alapmûveletekre vonatkozó hibaképleteket megvizsgáljuk, akkor látjuk, hogy éppen két közeli számot vonunk ki egymásból, ami a relatív hibakorlátot megnöveli. A másik számítási mód esetén ugyan osztunk, de nem a kicsi nevezõ problémás esete áll fenn.

A kiindulási értékek hibakorlátjai: $\Delta_a = \Delta_b = 5 \cdot 10^{-8}$, $\boldsymbol{d}_a = \boldsymbol{d}_b = \dfrac{5 \cdot 10^{-8}}{141} = 0{,}355 \cdot 10^{-10}$.

$\Delta_x = \Delta_a + \Delta_b = 10^{-7}$, $\boldsymbol{d}_x = \dfrac{\Delta_x}{x} = \dfrac{10^{-7}}{3{,}53549 \cdot 10^{-3}} = 0{,}283 \cdot 10^{-4}$.

A relatív hibakorlát nagyságrendekkel nõtt.

Vizsgáljuk a másik számítási módszert. $\Delta_{a+b} = \Delta_a + \Delta_b = 10^{-7}$.

Mivel $\Delta_1 = 0$ (az 1 pontos érték), $\Delta_y = \Delta_{\frac{1}{a+b}} = \dfrac{|a+b| \cdot \Delta_1 + |1| \cdot \Delta_{a+b}}{(a+b)^2} = \dfrac{10^{-7}}{242^2} = 0{,}17076 \cdot 10^{-11}$.

A relatív hibakorlátra $\boldsymbol{d}_y = \boldsymbol{d}_{\frac{1}{a+b}} = \dfrac{\Delta_y}{y} = \dfrac{1{,}7076 \cdot 10^{-12}}{3{,}53549 \cdot 10^{-3}} = 0{,}483 \cdot 10^{-9}$.

3. Példa. Az $\ln 150$ közelítésére az $\ln\left(e^5\right) = 5$ -öt használjuk $\left(e^5 \approx 148{,}41\right)$. Adjunk abszolút és relatív hibakorlátot a közelítésre.

Megoldás. 150 a kiindulási pontos érték, e^5 -nel közelítjük.

$\Delta_{e^5} = 2$, $\boldsymbol{d}_{e^5} = \dfrac{2}{e^5} \le \dfrac{2}{148} = 0{,}01352 = 1{,}352\,\%$.

Az $f(x) = \ln(x)$ függvényt közelítjük.

A függvény érték abszolút hibakorlátjára levezetett formula alapján $\Delta_{\ln\left(e^5\right)} = \Delta_5 = M_1 \cdot \Delta_{e^5}$,

ahol $M_1 = \max\left\{ |f'(x)| : x \in k(a) \right\} = \max\left\{ \dfrac{1}{x} : x \in [148;151] \right\} = \dfrac{1}{148}$.

Tehát $\Delta_5 = \dfrac{1}{148} \cdot 2 = 0{,}01352$, vagyis a kiindulási hibánál kisebb.

A relatív hibára $\boldsymbol{d}_{\ln\left(e^5\right)} = \boldsymbol{d}_5 = \dfrac{\frac{1}{74}}{5} = \dfrac{1}{370} = 0{,}002703 = 0{,}2703\,\%$.

Tehát a relatív hiba is csökkent.

4. Példa. A 3^p közelítésére használjuk $3^3 = 27$ -et $\left(3^p \approx 31{,}5443\right)$. Adjunk abszolút és relatív hibakorlátot a közelítésre.

Megoldás. p a kiindulási pontos érték, 3-mal közelítjük.

$\Delta_3 = 0{,}15$, $d_3 = \frac{0{,}15}{3} = 0{,}05 = 5\%$. Az $f(x) = 3^x$ függvényt közelítjük.

A függvény érték abszolút hibakorlátjára levezetett formula alapján $\Delta_{3^3} = M_1 \cdot \Delta_3$, ahol

$M_1 = \max\{|f'(x)| : x \in k(a)\} = \max\{\ln 3 \cdot 3^x : x \in [3; 3{,}15]\} = \ln 3 \cdot 3^{3{,}15} = 34{,}9765$.

Tehát $\Delta_{3^3} = 34{,}9765 \cdot 0{,}15 = 5{,}5467$, vagyis sokkal nagyobb a kiindulási hibánál.

A relatív hibára $d_{3^3} = \frac{5{,}5467}{27} = 0{,}1943 = 19{,}43\%$. Tehát a relatív hiba is nõtt.

1.4. Algoritmusok stabilitása

1.6. Definíció. Legyen B_1, B_2 bemenõ adat, K_1, K_2 kimenõ adat.
Az algoritmust stabilnak nevezzük, ha $\exists c > 0 : |K_1 - K_2| \le c \cdot |B_1 - B_2|$.
(Ha a bemenõ adatok hibája e, akkor a kimenõ adatoké legfeljebb $c \cdot e$.)

1. **Példa.** Melyik rekurzió stabil az alábbiak közül? Mekkora lesz az n.tag hibája, ha pontosan számolunk és $\Delta x_0 = \Delta y_0 = e$, $\Delta x_1 = \Delta y_1 = 0$.

a) $x_{k+1} = x_k - \frac{1}{4} x_{k-1}$

b) $y_{k+1} = 4(x_k - x_{k-1})$

Megoldás. a) Igazoljuk, hogy a rekurzió stabil. Legyen $xx_0 := x_0 - e$ és $xx_1 := x_1$.

$$xx_{k+1} - x_{k+1} = \left(xx_k - \frac{1}{4} xx_{k-1}\right) - \left(x_k - \frac{1}{4} x_{k-1}\right) = xx_k - x_k - \frac{1}{4}(xx_{k-1} - x_{k-1})$$

Vezessük be a $\Delta_k := xx_k - x_k$ jelölést.

A (Δ_k) hibasorozat rekurziója ugyanaz, mint az (x_k) sorozaté, de a kezdeti értékek mások.

Oldjuk meg a $\Delta_{k+1} = \Delta_k - \frac{1}{4}\Delta_{k-1}$ differencia egyenletet a $\Delta_0 = e$ és $\Delta_1 = 0$ kezdeti feltételekkel.

A karakterisztikus egyenlete : $z^2 = z - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$.

Az $\frac{1}{2}$ kétszeres gyöke az egyenletnek..

A differencia egyenlet általános megoldása: $\Delta_n = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2 n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$\Delta_0 = c_1 = e$, $\Delta_1 = c_1 \cdot \frac{1}{2} + c_2 \cdot \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -e$.

Innen a kezdeti érték feladat megoldása: $\Delta_n = e\left(\frac{1}{2}\right)^n - e \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(1-n)e}{2^n}$.

Mivel az $\left(\frac{(1-n)}{2^n}\right)$ sorozat konvergens, ezért korlátos is. Tehát $\exists c>0:\ |\Delta_n| \le c\cdot \boldsymbol{e}$.

b) Igazoljuk, hogy a rekurzió instabil. Legyen $yy_0 := y_0 - \boldsymbol{e}$ és $yy_1 := y_1$.
$yy_{k+1} - y_{k+1} = 4(yy_k - yy_{k-1}) - 4(y_k - y_{k-1}) = 4((yy_k - y_k) - (yy_{k-1} - y_{k-1}))$
Vezessük be a $\Delta_k := yy_k - y_k$ jelölést.
A (Δ_k) hibasorozat rekurziója ugyanaz, mint az (y_k) sorozaté, de a kezdeti értékek mások.
Oldjuk meg a $\Delta_{k+1} = 4(\Delta_k - \Delta_{k-1})$ differencia egyenletet a $\Delta_0 = \boldsymbol{e}$ és $\Delta_1 = 0$ kezdeti feltételekkel.
A karakterisztikus egyenlete : $z^2 = 4(z-1) \Leftrightarrow (z-2)^2 = 0$.
A 2 kétszeres gyöke az egyenletnek.
A differencia egyenlet általános megoldása: $\Delta_n = c_1 2^n + c_2 n\cdot 2^n,\ n\in \mathbb{N}$.
$\Delta_0 = c_1 = \boldsymbol{e}$, $\Delta_1 = c_1\cdot 2 + c_2\cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\boldsymbol{e}$.
Innen a kezdeti érték feladat megoldása: $\Delta_n = \boldsymbol{e}\cdot 2^n - \boldsymbol{e}\cdot n\cdot 2^n = (1-n)\boldsymbol{e}\cdot 2^n$.
Mivel az $((1-n)2^n)$ sorozat nem korlátos, az n.tag hibája nem korlátos, tehát nem stabil.