

3. Nemlineáris egyenletek megoldása

3.1. Egyszerű iteráció

Legyen $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, keressük azt az $x^* \in [a,b]$ értéket, melyre $f(x^*) = 0$.

Ezt az x^* értéket a függvény zérushelyének vagy gyökének nevezzük.

3.1. Tétel. (Bolzano tétel)

Ha $f \in C[a,b]$ és $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor f -nek van gyöke $[a,b]$ -ben.

Bizonyítás: Lásd analízis.

A tétel alapján a gyök meghatározásának legegyszerűbb módja az **intervallumfelezés**.

Induljunk ki az $x_0 := a$ és $y_0 := b$ kezdőértékekből. x_{k+1}, y_{k+1} -et a következő rekurzióval definiáljuk:

$$\text{Ha } f(x_k) \cdot f\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right) < 0, \text{ akkor } y_{k+1} := \frac{x_k + y_k}{2}.$$

$$\text{Ha } f(x_k) \cdot f\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right) = 0, \text{ akkor } x^* := \frac{x_k + y_k}{2} \text{ a keresett gyök.}$$

$$\text{Ha } f(x_k) \cdot f\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right) > 0, \text{ akkor } x_{k+1} := \frac{x_k + y_k}{2}.$$

A módszer hibabecslése:

$$y_k - x_k = \frac{1}{2}(y_{k-1} - x_{k-1}) = \frac{1}{2^k}(y_0 - x_0) = \frac{1}{2^k}(b - a) \text{ és } x^* \in [x_k, y_k],$$

Innen következik, hogy $\lim(x_k) = \lim(y_k) = x^*$.

3.1. Definíció: Tegyük fel, hogy az (x_k) sorozat konvergens és $x^* = \lim(x_k)$. Ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = c \text{ és } 0 < c < \infty,$$

akkor az (x_k) sorozatot p -edrendben konvergensnek nevezzük.

Megjegyzések:

- 1) p egyértelmű, $p \geq 1$ és nem feltétlenül egész.
- 2) $p = 1$ esetén elsőrendű vagy lineáris konvergenciának nevezzük. Ekkor $0 < c \leq 1$.
- 3) $p = 2$ esetén másodrendű vagy kvadrátikus konvergenciának nevezzük.
- 4) A gyakorlatban a következő alakot is használják: $\exists c \in \mathbb{R}^+ : |x_{k+1} - x^*| \leq c \cdot |x_k - x^*|^p$

Mivel az $f(x) = 0$ egyenlet a vele ekvivalens $x = \Phi(x)$ alakra hozható, ezért f gyökének meghatározása a Φ fixpontjának előállításával is történhet.

3.2. Tétel. (A Banach-féle fixponttétel egyváltozós alakja)

Legyen $\Phi: A \rightarrow A$ ($A \subset \mathbb{R}$, korlátos és zárt) és tegyük fel, hogy Φ kontrakció

(azaz $\exists 0 \leq q < 1$, hogy $\forall x, y \in A$ -ra $|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq q \cdot |x - y|$),

akkor

- 1) Φ -nek $\exists!$ fixpontja és $x^* \in A$ ($x^* = \Phi(x^*)$).
- 2) $\forall x_0 \in A$ esetén az $x_{k+1} := \Phi(x_k)$ iterációval definiált sorozatra $\lim(x_k) = x^*$.
- 3) $|x_k - x^*| \leq q^k \cdot |x_0 - x^*|$ illetve
 $|x_k - x^*| \leq \frac{q^k}{1-q} \cdot |x_1 - x_0|$ ($k \in \mathbb{N}$) hibabecslés adható.

Bizonyítás: (Lásd analízisben részletesen.)

Először belátjuk, hogy az (x_k) sorozat Cauchy-sorozat. Az A halmaz korlátos és zárt volta miatt konvergens és a határértéke benne van a halmazban. Mivel Φ folytonos függvény, a kapott határértékről belátható, hogy Φ fixpontja. Az egyértelműséget indirekt módon bizonyíthatjuk Φ kontrakció voltának felhasználásával.

Megjegyzések:

- 1) A fixponttétel az (x_k) sorozatra $p \geq 1$ konvergenciarendet garantál.
- 2) Mivel az x_0 kezdőérték hibájáról gyakran nincs információnk, ezért a hibabecslés második alakja a gyakorlatban jobban használható.

3.3. Lemma.

Ha $\Phi \in C^m[a, b]$ és $\Phi'(x^*) = \Phi''(x^*) = \dots = \Phi^{(m-1)}(x^*) = 0$, de $\Phi^{(m)}(x^*) \neq 0$, akkor

$$\exists x \in (a, b): \Phi(x) - x^* = \frac{\Phi^{(m)}(x)}{m!} \cdot (x - x^*)^m \quad \forall x \in [a, b]$$

Bizonyítás: A Taylor formula felhasználásával

$\exists x \in (a, b)$, hogy $\forall x \in [a, b]$ -re

$$\begin{aligned} \Phi(x) - x^* &= \Phi(x) - \Phi(x^*) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\Phi^{(k)}(x^*)}{k!} (x - x^*)^k + \frac{\Phi^{(m)}(x)}{m!} (x - x^*)^m = \\ &= \frac{\Phi^{(m)}(x)}{m!} (x - x^*)^m \end{aligned}$$

3.4. Tétel.

Ha $\Phi \in C^m[a, b]$ és $\Phi'(x^*) = \Phi''(x^*) = \dots = \Phi^{(m-1)}(x^*) = 0$, de $\Phi^{(m)}(x^*) \neq 0$, akkor x^* -nak létezik olyan $k(x^*)$ környezete, hogy $\forall x_0 \in k(x^*)$ -ra az $x_{k+1} := \Phi(x_k)$ iteráció m -edrendben konvergens.

Hibabecslése: $|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M}{m!} \cdot |x_k - x^*|^m$, ahol $M = \sup_{x \in k(x^*)} |\Phi^{(m)}(x)|$.

Bizonyítás: Ha $\Phi'(x^*) = 0$, akkor x^* -nak létezik olyan $k(x^*)$ környezete, hogy itt kontrakció. Ugyanis a Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával és a $q := \sup \{|\Phi'(x)| : x \in k(x^*)\} < 1$ jelöléssel Φ kontrakció az adott környezetben, így a fixponttétel miatt az (x_k) sorozat konvergens.

Az $x_{k+1} := \Phi(x_k)$ iterációra az 3.3. Lemmát alkalmazva

$$x_{k+1} - x^* = \frac{\Phi^{(m)}(x)}{m!} \cdot (x_k - x^*)^m.$$

Az iteráció hibabecslése:

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M}{m!} \cdot |x_k - x^*|^m, \text{ ahol } M = \sup_{x \in k(x^*)} |\Phi^{(m)}(x)|.$$

A konvergencia m -edrendű, mivel

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^m} = \lim_{k \rightarrow \infty} |\Phi^{(m)}(x_k)| = |\Phi^{(m)}(x^*)| = c \neq 0.$$

Kidolgozott példák

1. Példa. Mennyi a konvergencia rendje a következő konvergens sorozatoknak?

a) $\frac{1}{n^2}$ b) $\frac{1}{2^n}$ c) $\frac{1}{2^{2^n}}$

Megoldás.

a) $\frac{\left| \frac{1}{(n+1)^2} - 0 \right|}{\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right|^p} = \frac{(n^2)^p}{(n+1)^2} \rightarrow 1 \quad (p=1 \text{ és } n \rightarrow \infty \text{ esetén})$

b) $\frac{\left| \frac{1}{2^{n+1}} - 0 \right|}{\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right|^p} = \frac{(2^n)^p}{2^{n+1}} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (p=1 \text{ és } n \rightarrow \infty \text{ esetén})$

c) $\frac{\left| \frac{1}{2^{2^{n+1}}} - 0 \right|}{\left| \frac{1}{2^{2^n}} - 0 \right|^p} = \frac{(2^{2^n})^p}{2^{2^{n+1}}} = \frac{(2^{2^n})^p}{(2^{2^n})^2} \rightarrow 1 \quad (p=2 \text{ és } n \rightarrow \infty \text{ esetén})$

2. Példa. Keressük az $x = \cos(x)$ egyenlet megoldását a $[0,1]$ intervallumon.

Legyen $x_0 \in [0,1]$ tetszőleges kezdőérték és $x_{k+1} := \cos(x_k)$. Konvergens-e a megadott sorozat?

Megoldás.

Ha $x_k \in [0,1]$, akkor $x_{k+1} := \cos(x_k) \in [0,1]$. Tehát a sorozat nem vezet ki a $[0,1]$ intervallumból. Vizsgáljuk meg, hogy a sorozatbeli $\Phi(x) = \cos(x)$ függvény kontrakció-e a megadott intervallumon. A Lagrange-féle középértéktétel miatt $\exists x \in (x, y)$, hogy

$$\begin{aligned} |\Phi(x) - \Phi(y)| &= |\cos(x) - \cos(y)| = |\cos'(x)| \cdot |x - y| = |\sin(x)| \cdot |x - y| \leq \\ &\leq \sin(1) \cdot |x - y| = q \cdot |x - y| \end{aligned}$$

ahol $q = 0.8415 < 1$ a keresett kontrakciós együttható.

A fixponttételt alkalmazva bebizonyítottuk a sorozat konvergenciáját. A konvergencia rendje lineáris, mivel

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|} = \lim_{k \rightarrow \infty} |\sin(x_k)| = |\sin(x^*)| \neq 0.$$

3. Példa. Az $5x^3 - 20x + 3 = 0$, $x \in [0,1]$ egyenlet megoldására írjunk fel egy iterációt és bizonyítsuk a konvergenciáját.

Megoldás.

Az egyenletet írjuk át pl. a következőképpen: $x = \frac{5x^3 + 3}{20}$. Ekkor a $\Phi(x) = \frac{5x^3 + 3}{20}$ függvény

fixpontját keressük $[0,1]$ -en. A függvény értékkészlete $\left[\frac{3}{20}, \frac{8}{20}\right] \subset [0,1]$.

Φ kontrakció, ugyanis a Lagrange-féle középértéktétel miatt

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(x)| \cdot |x - y|, \quad x \in (0,1)$$

ahol $|\Phi'(x)| = \frac{3}{4}x^2 < \frac{3}{4} =: q$ a kontrakciós együttható.

A fixponttételt alkalmazva az $x_{k+1} = \frac{5x_k^3 + 3}{20}$ iteráció $\forall x_0 \in [0,1]$ -re konvergál az egyenlet $[0,1]$ -beli megoldásához, elsőrendben $(\Phi'(x^*) \neq 0)$.

Elemi módon is bizonyítható a konvergencia. Ha $\forall k$ -ra $x_k \in [0,1]$, akkor

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x^*| &= |\Phi(x_k) - \Phi(x^*)| = \frac{1}{20} |5x_k^3 + 3 - 5x^{*3} - 3| = \frac{5}{20} |x_k^3 - x^{*3}| = \\ &= \frac{1}{4} |x_k^2 + x_k x^* + x^{*2}| \cdot |x_k - x^*| \leq \frac{1}{4} (|x_k^2| + |x_k x^*| + |x^{*2}|) \cdot |x_k - x^*| \leq \\ &\leq \frac{3}{4} |x_k - x^*| \leq \dots \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} \cdot |x_0 - x^*|. \end{aligned}$$

Innen már következik az iterációs sorozat konvergenciája.

A konvergencia rendje lineáris, ugyanis

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4} |x_k^2 + x_k x^* + x^{*2}| = \frac{3}{4} |x^{*2}| \neq 0.$$

4. Példa. Tekintsük az $f(x) = x^2 - 2 = 0, x \in [0, +\infty)$ egyenlet megoldására $(\sqrt{2})$ a következő iterációkat. Vizsgáljuk meg, hogy konvergensek-e, milyen rendben?

a) $x_{k+1} := \frac{2}{x_k}$

b) $x_{k+1} := 1 + \frac{1}{1 + x_k}$

c) $x_{k+1} := \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{2}{x_k} \right)$

Megoldás:

a) Mivel $x_k = \begin{cases} x_0, & \text{ha } k \text{ páros} \\ \frac{2}{x_0}, & \text{ha } k \text{ páratlan} \end{cases}$, $x_0 \neq \sqrt{2}$ esetén az (x_k) sorozat divergens.

b) $x_0 > 0$ esetén $x_k > 1$ $k \geq 1$ -re. Mivel

$$x_{k+1} - \sqrt{2} = \Phi(x_k) - \Phi(\sqrt{2}) = 1 + \frac{1}{1+x_k} - 1 - \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{(1+x_k)(1+\sqrt{2})}(\sqrt{2} - x_k)$$

és $x_k > 1, \sqrt{2} > 1$ miatt következik, hogy

$$|x_{k+1} - \sqrt{2}| = \frac{1}{(1+x_k)(1+\sqrt{2})} |x_k - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4} |x_k - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} |x_0 - \sqrt{2}|,$$

ezért az (x_k) sorozat konvergens.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - \sqrt{2}|}{|x_k - \sqrt{2}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+x_k)(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} \neq 0, \text{ így a konvergencia rendje lineáris.}$$

$$\text{c) } \Phi(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right).$$

$$\Phi'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{x^2} \right), \text{ ahonnan } \Phi'(\sqrt{2}) = 0.$$

$$\Phi''(x) = 2 \cdot \frac{1}{x^3}, \text{ de } \Phi''(\sqrt{2}) \neq 0.$$

Tehát az 5.4. Tételt felhasználva az iteráció a $\sqrt{2}$ környezetéből indítva másodrendben konvergál.

Elemi módon is bizonyítjuk a feladatot.

Igazoljuk teljes indukcióval, hogy a sorozat $x_0 > \sqrt{2}$ esetén monoton fogyó és alulról korlátos, illetve $0 < x_0 \leq \sqrt{2}$ esetén monoton növekvő és felülről korlátos (házi feladat). Ezzel bizonyítjuk a sorozat konvergenciáját. Jelöljük x^* -al a sorozat határértékét.

Ekkor

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{k+1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \left(x_k + \frac{2}{x_k} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(x^* + \frac{2}{x^*} \right).$$

Innen $x_k \geq 0$ -t figyelembe véve $x^* = \sqrt{2}$. A hibabecslésre

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \sqrt{2} &= \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{2}{x_k} \right) - \sqrt{2} = \frac{1}{2} \left(x_k - \sqrt{2} + \frac{2}{x_k} - \sqrt{2} \right) = \frac{1}{2} \left(x_k - \sqrt{2} + \frac{2 - \sqrt{2} \cdot x_k}{x_k} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(x_k - \sqrt{2} - \sqrt{2} \frac{x_k - \sqrt{2}}{x_k} \right) = \frac{1}{2} \left(x_k - \sqrt{2} \right) \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{x_k} \right) = \frac{1}{2} (x_k - \sqrt{2}) \frac{(x_k - \sqrt{2})}{x_k} = \text{ha} \\ &= \frac{1}{2x_k} (x_k - \sqrt{2})^2 < \frac{1}{2e} (x_k - \sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

adódik, mivel $x_0 \geq e > 0$ esetén $x_k \geq e$. A konvergencia másodrendű, ugyanis

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - \sqrt{2}|}{|x_k - \sqrt{2}|^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2x_k} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0.$$