

1. Numerikus integrálás (Interpolációs kvadrátúra formulák)

Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, korlátos és $w: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ súlyfüggvény. Az $\int_a^b f w$ integrál

kiszámításához közelítsük f -et a $P(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot l_i(x) \in P_{n-1}$ interpolációs polinomjával,

ahol $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ különböző alappontok és $l_i(x)$ az i . Lagrange alappolinom.

Ekkor

$$\int_a^b f w \approx \int_a^b P w = \sum_{i=1}^n f(x_i) \int_a^b l_i w = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i).$$

7.1. Definíció. Az $\int_a^b f w$ integrál közelítésére felírt $\sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$ kvadrátúra formulát

interpolációs típusúnak nevezzük, ha $c_i = \int_a^b l_i w$ ($i = 1, \dots, n$).

7.1. Tétel. A $\sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$ kvadrátúra formula pontos $\forall f \in P_{n-1}$ -re $\Leftrightarrow c_i = \int_a^b l_i w$ ($i = 1, \dots, n$).

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Ha a kvadrátúra formula pontos $\forall f \in P_{n-1}$ -re, akkor l_j -kre is pontos, azaz

$$\int_a^b l_j w = \sum_{i=1}^n c_i l_j(x_i) = c_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

$\Leftarrow$: Legyen $f \in P_{n-1}$, ekkor f megegyezik az interpolációs polinomjával, azaz

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot l_i(x).$$

$$\text{Integrálva} \quad \int_a^b f w = \int_a^b \sum_{i=1}^n f(x_i) l_i(x) w(x) dx = \sum_{i=1}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x) w(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i).$$

Tehát a kvadrátúra formula pontos $f \in P_{n-1}$ -re.

Látjuk, hogy a kvadrátúra formulát az x_i, c_i ($i = 1, \dots, n$) értékek határozzák meg. Ezek választásától függően az alábbi típusú kvadrátúra formulákkal foglalkozunk.

Newton-Cotes típusú kvadrátúra formulák:

A $w \equiv 1$ súlyfüggvény. Az $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ alappontok az intervallum ekvidisztans

osztópontjai, azaz $x_i = a + i \cdot h$ ($i = 1, \dots, n$), ahol $h = \frac{b-a}{n-1}$.

Nyíltnak nevezzük a kvadrátúra formulát, ha a és b nem szerepel az osztópontok közt.

Jelölés: $Ny(n)$, ha n részre osztjuk az intervallumot. Ekkor $n-1$ alappontja van.

Zártnak nevezzük a kvadratura formulát, ha a és b osztópont.

Jelölés: $Z(n)$, ha n részre osztjuk az intervallumot. Ekkor $n+1$ alappontja van.

Gauss típusú kvadratura formulák:

Az x_i, c_i ($i=1, \dots, n$) értékeket úgy adjuk meg, hogy a lehető legmagasabb fokszámú polinomokra pontos legyen a formula.

Csebisev típusú kvadratura formulák:

Az x_i ($i=1, \dots, n$) alappontokat úgy adjuk meg, hogy $c_i \equiv c$ ($i=1, \dots, n$)-re. Így a formula kiértékeléséhez kevesebbet kell számolnunk.

3.2. Newton-Cotes típusú formulák

Érintő formula (Ny(2)).

Az intervallumot két részre osztjuk. Mivel nyílt a formula, így egy alappontja lesz $x_1 = \frac{a+b}{2}$

és f -et a konstans interpolációs polinomjával közelítjük. $c_1 = \int_a^b l_1(x) dx = \int_a^b 1 dx = b-a$, ahol

$l_1(x) = 1$ a konstans Lagrange alappolinom. Tehát az érintő formula

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Trapéz formula (Z(1)).

Az intervallumot egy részre osztjuk. Mivel zárt a formula, így két alappontja lesz, az intervallum két végpontja $x_1 = a$ és $x_2 = b$. Az f függvényt az elsőfokú interpolációs polinomjával közelítjük.

$$c_1 = \int_a^b l_1(x) dx = \int_a^b \frac{x-b}{a-b} dx = \frac{b-a}{2} \text{ és}$$
$$c_2 = \int_a^b l_2(x) dx = \int_a^b \frac{x-a}{b-a} dx = \frac{b-a}{2}.$$

Tehát a trapéz formula

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) =: T(f).$$

Megjegyzés. Ha f nemnegatív függvény, akkor a fenti képlet az $[a, b]$ intervallum és az $f(a), f(b)$ függvényértékek által meghatározott trapéz területe.

7.2. Tétel. Legyen $f \in C^2[a, b]$ és jelölje $R_2(f) = \int_a^b f - T(f)$ a trapéz formula hibáját. Ekkor

$$R_2(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(x), \text{ ahol } x \in (a, b).$$

Bizonyítás. A P_1 interpolációs polinom hibája alapján

$$f(x) - P_1(x) = \frac{f''(x)}{2!} (x-a)(x-b), \text{ ahol } x \in (a, b).$$

$$R_2(f) = \int_a^b (f - P_1) = \int_a^b \frac{f''(x)}{2} (x-a)(x-b) dx.$$

Mivel $(x-a)(x-b) \geq 0$, $x \in [a, b]$, az integrálszámítás középértéktételét és a derivált Darboux tulajdonságát felhasználva

$$R_2(f) = \frac{f''(h)}{2!} \int_a^b (x-a)(x-b) dx = -\frac{f''(h)}{2!} \frac{(b-a)^3}{3!}, \text{ } h \in (a, b)$$

Integrálással ellenőrizhető, hogy $\int_a^b (x-a)(x-b) dx = -\frac{(b-a)^3}{6}.$

Simpson formula (Z(2)).

Az intervallumot két részre osztjuk. Mivel zárt a formula, így három alappontja lesz, az intervallum két végpontja és a felezőpont: $x_1 = a$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$ és $x_3 = b$. Az f függvényt az másodfokú interpolációs polinomjával közelítjük.

$$c_1 = \int_a^b l_1 = \int_a^b \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} dx = \frac{1}{6}(b-a)$$

$$c_2 = \int_a^b l_2 = \int_a^b \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} dx = \frac{4}{6}(b-a)$$

$$c_3 = \int_a^b l_3 = \int_a^b \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} dx = \frac{1}{6}(b-a)$$

Tehát a Simpson formula

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) =: S(f).$$

7.3. Tétel. Legyen $f \in C^3[a, b]$ és jelölje $R_3(f) = \int_a^b f - S(f)$ a Simpson formula hibáját.

Ekkor

$$R_3(f) = -\frac{(b-a)^5}{2^5 \cdot 90} f''''(x) = -\frac{(b-a)^5}{5!} \frac{f''''(h)}{4!}, \text{ ahol } x \in (a, b).$$

Kidolgozott példák

1. Példa. Igazoljuk, hogy a Simpson formula minden legfeljebb harmadfokú polinomra pontos, de a negyedfokú polinomokra általában nem.

Megoldás. A hibaformula ismeretében a fenti állítás triviális. Próbáljuk meg anélkül bizonyítani. Mivel a Simpson formulához a 3 alappontra felírt interpolációs polinomot használjuk, minden legfeljebb másodfokú polinomra pontos. Elég $f(x) = x^3$ -re bizonyítani az állítást. A Simpson formula

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{b-a}{6} \left(a^3 + 4 \left(\frac{a+b}{2} \right)^3 + b^3 \right) = \frac{b-a}{12} (2a^3 + a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 2b^3) = \\ &= \frac{b-a}{4} (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = \frac{b^4 - a^4}{4} \end{aligned}$$

$$\int_a^b x^3 dx = \frac{b^4 - a^4}{4} \text{ a pontos érték. Tehát pontos } f(x) = x^3 \text{-re.}$$

Legyen $[a, b] = [0, 1]$ és $g(x) = x^4$.

$$\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}, \text{ de } S(g) = \frac{1}{6} \left(0 + 4 \left(\frac{1}{2} \right)^4 + 1^4 \right) = \frac{5}{24}.$$

2. Példa. Vezessük le a Ny(3) Newton-Cotes formulát.

Megoldás. Az alappontok $x_1 = \frac{2a+b}{3}$ és $x_2 = \frac{a+2b}{3}$.

A Lagrange alappolinomok $l_1(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2}$ és $l_2(x) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_a^b l_1 = \frac{1}{x_1-x_2} \int_a^b (x-x_2) dx = \frac{3}{a-b} \left[\frac{x^2}{2} - x_2 x \right]_a^b = \\ &= \frac{3}{a-b} \left(\frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{a+2b}{3} (b-a) \right) = -\frac{3}{2} (a+b) + 3 \frac{a+2b}{3} = \frac{b-a}{2} \end{aligned}$$

Ugyanígy (vagy a szimmetriára hivatkozva) belátható, hogy $c_2 = \frac{b-a}{2}$.

A kapott kvadratúra formula $\int_a^b f \approx \frac{b-a}{2} \left(f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + f\left(\frac{a+2b}{3}\right) \right)$.

7.2. Összetett formulák (szabályok)

Az $[a, b]$ intervallumot egyenlő részekre osztjuk és minden részintervallumon egy-egy kvadratúra formulát alkalmazunk.

Trapéz szabály.

Az $[a, b]$ intervallumot m egyenlő részre osztjuk és minden részintervallumon egy-egy trapéz formulát alkalmazunk. Az alappontok $x_i = a + \frac{b-a}{m} \cdot i$ ($i = 0, 1, \dots, m$).

Tehát a trapéz szabály

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{2m} \left(f(a) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(b) \right) =: T_m(f).$$

Hibaformulája: $\int_a^b f - T_m(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(x)$, ahol $x \in (a, b)$.

Simpson szabály.

Az $[a, b]$ intervallumot $\frac{m}{2}$ egyenlő részre osztjuk (m páros), az alappontok $x_i = a + \frac{b-a}{m} \cdot i$ ($i = 0, 1, \dots, m$). Minden $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ részintervallumon egy-egy Simpson formulát alkalmazunk. Tehát a Simpson szabály

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{3m} \left(f(a) + 4 \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} f(x_{2k-1}) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_{2k}) + f(b) \right) =: S_m(f).$$

Hibaformulája: $\int_a^b f - S_m(f) = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} \cdot f''''(x)$, ahol $x \in (a, b)$.

Megjegyzés.

1. Ha f'' korlátos, akkor a trapéz összetett formulában szereplő $\frac{1}{m^2}$ miatt a közelítés hibája

$m \rightarrow \infty$ esetén $T_m(f) - \int_a^b f \rightarrow 0$.

2. Ha f'''' korlátos, akkor a Simpson összetett formulában szereplő $\frac{1}{m^4}$ miatt a közelítés

hibája $m \rightarrow \infty$ esetén $S_m(f) - \int_a^b f \rightarrow 0$.