8. Közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldása

8.1. Definíció. Legyen $\Omega \subset I\!R^n$ tartomány, $I \subset I\!R$ nyílt intervallum, $f : I \times \Omega \to I\!R^n$ folytonos függvény. Az $y : I \to I\!R^n$ differenciálható függvényekre vonatkozó

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (x \in I)$$

egyenletet közönséges (elsõrendû explicit) differenciálegyenletnek nevezzük. Az

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \quad (x \in I) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

feladatot kezdeti érték problémának (KÉP) nevezzük.

8.2. Definíció: Az f függvény a második változójában teljesíti a Lipschitz-feltételt, ha $\forall\, K \subset \Omega$ kompakt halmazhoz $\exists L > 0$, melyre

$$\| f(x, y_1) - f(x, y_2) \| \le L \cdot \| y_1 - y_2 \| \quad \forall\, y_1, y_2 \in K \text{ esetén.}$$

8.1. Tétel. (Picard-Lindelöf) Ha az $f : I \times \Omega \to I\!R^n$ folytonos függvény kielégíti a második változójában a Lipschitz-feltételt, akkor $\forall\, x_0 \in I$ és $\forall\, y_0 \in \Omega$ esetén a KÉP-nak létezik megoldása. Az

$$y_0(x) := y_0$$

$$y_{k+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))\, dt$$

függvénysorozat egyenletesen konvergál a KÉP megoldásához. (Szukcesszív approximáció.)

Megjegyzés. A függvénysorozatban az integrálást koordinátánként, az $f = (f_1, ..., f_n)$ koordináta függvényeire értjük. A továbbiakban csak az $n = 1$ esettel foglalkozunk.

8.1. Analitikus módszerek

(Két példán, csak a legismertebbek.)

1. Példa. Szeparábilis (szétválaszható változójú) differenciálegyenlet.

$$\begin{cases} y' = 3x^2 y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Megoldás. $\frac{y'}{y} = 3x^2$, $\ln'(y) = 3x^2$, $\ln(y) = \int 3x^2 dx = x^3 + c_1$. Innen $y(x) = e^{x^3} \cdot c_2$.

A kezdeti feltétel: $y(0) = e^0 \cdot c_2 = 1 \to c_2 = 1$. A KÉP megoldása: $y(x) = e^{x^3}$.

2. Példa. Elsõrendû lineáris inhomogén differenciálegyenlet.

$$\begin{cases} y' = 1 - x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Megoldás. A homogén egyenlet: $y' - y = 0$ vagyis $y' = y$. Szeparábilis egyenletként megoldva kapjuk, hogy az általános megoldása: $y(x) = e^x \cdot c$.
Az inhomogén egyenlet megoldása az állandók variálásának elvével történik.
A megoldást $c(x) \cdot e^x$ alakban keressük. Helyettesítsük be az inhomogén egyenletbe:

$$c'(x)e^x + c(x)e^x = 1 - x + c(x)e^x$$

$$c'(x)e^x = 1 - x$$

$$c'(x) = (1-x)e^{-x}$$

Parciális integrálást alkalmazva:

$$c(x) = \int (1-x)e^{-x}dx = (1-x)\left(-e^{-x}\right) - \int (-1)\left(-e^{-x}\right)dx =$$

$$= (x-1)e^{-x} + e^{-x} + c = xe^{-x} + c$$

Tehát $y(x) = \left(xe^{-x} + c\right) \cdot e^x = x + c \cdot e^x$ alakú.
A kezdeti feltételbõl $y(0) = 0 + c \cdot e^0 = c = 1$, tehát a KÉP megoldása: $y(x) = x + e^x$.

8.2. Kvázi analitikus (vagy kvázi numerikus) módszerek

A) Picard iteráció. (Lásd 8.1. Tétel függvénysorozata.)

3. Példa. Alkalmazzuk a Picard iterációt az 1. Példa feladatára.

$$\begin{cases} y' = 3x^2 y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Megoldás.

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 3t^2 \cdot 1 dt = 1 + x^3$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x 3t^2\left(1 + t^3\right)dt = 1 + x^3 + \frac{1}{2}x^6 \quad \text{stb.}$$

Látjuk, hogy minden lépésben a megoldás Taylor sorának újabb tagját kapjuk meg.

B) Taylor sor módszer. A megoldás Taylor sorát közelítjük az $y^{(k)}(x_0)$ értékek meghatározásával.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Az $y^{(k)}(x_0)$ derivált értékeket az egyenletbõl meghatározzuk.

$$y(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

$$y''(x_0) = \partial_1 f(x_0, y_0) + \partial_2 f(x_0, y_0) \cdot y'(x_0) =$$

$$= \partial_1 f(x_0, y_0) + \partial_2 f(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0) \quad \text{stb.}$$

4. Példa. Alkalmazzuk a 2. Példa feladatára.

$$\begin{cases} y' = 1 - x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} &y(0) = 1 \\ &y'(0) = 1 + 0 + y(0) = 2 \\ &y'' = -1 + y' \to y''(0) = -1 + y'(0) = -1 + 2 = 1 \\ &y''' = y'' \to y'''(0) = y''(0) = 1 \end{aligned}$$

Innen $k \geq 3$-ra $y^{(k)} = y^{(k-1)} = ... = y''$ és így $y^{(k)}(0) = 1$.

Tehát a megoldás: $y(x) = 1 + 2x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{k!}x^k + ... = x + e^x$.

8.3. Numerikus módszerek

8.3. Definíció. Diszkrét módszernek nevezzük azt az eljárást, amely a differenciálegyenlet megoldását véges sok pontban állítja elõ. A diszkrét módszert k **lépéses** $(k \in \mathbb{N})$ módszernek nevezzük, ha az y megoldás x_n pontbeli y_n közelítõ értékét az $y_{n-k}, y_{n-k+1}, ..., y_{n-1}$ értékekbõl állítja elõ.

A továbbiakban $y : I \to \mathbb{R}$, $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ $(\Omega \subset \mathbb{R})$ és $x^* \in I$ tetszõleges, $N \in \mathbb{N}$.

Jelölések: $h := \frac{x^* - x}{N}$, $x_n := x_0 + nh$ $(n = 0, ..., N)$,

$y_0 = y(x_0)$ kezdeti érték és y_n az $y(x_n)$ pontos megoldás közelítése.

8.4. Definíció. A numerikus módszer **konvergens**, ha $\forall x^* \in I, x^* > x_0$ esetén

$$\lim_{h \to +0} \left(\max_{n=0,..,N} | y(x_n) - y_n | \right) = 0 .$$

A módszer p **-edrendben konvergens**, ha $\exists\ c, h_0 > 0$:

$$| y(x_n) - y_n | \leq c \cdot h^p \quad \forall h \leq h_0 ,\ (n = 0,1, ..., N).$$

8.5. Definíció. A numerikus módszer **lokális hibája** a módszerrel egy lépés alatt elkövetett hiba, ha pontos értékbõl indulunk, azaz

$$d_{n+1} := y(x_{n+1}) - y_{n+1} \quad \text{feltéve, hogy } y_n = y(x_n).$$

A numerikus módszer **globális hibája** a módszerrel több lépés után felhalmozódó hiba, azaz

$$e_n := y(x_n) - y_n \ \text{ feltéve, hogy } y_0 = y(x_0).$$

8.4. Explicit Euler módszer

A diszkretizációs jelöléseket használva az **explicit Euler módszer** alakja:

$$\begin{cases} y_{n+1} := y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \\ x_0, y_0 \text{ adott}, \quad (n = 0,1,\ldots,N-1) \end{cases}$$

Motiváció: A derivált közelítésére gyakran használjuk a differencia hányadost:

$$y'(x_n) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \ .$$

Felhasználva az egyenletben: $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n)) \approx \dfrac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}$.

Innen átrendezve

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + h \cdot f(x_n, y(x_n)) \ .$$

8.2. Tétel. Az explicit Euler módszer lokális hibája:

$$d_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^2) \quad (\text{, azaz } \exists c > 0 : \ |d_{n+1}| \le c \cdot h^2 \ ) .$$

Bizonyítás. Az y pontos megoldásra írjuk fel a Taylor formulát:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \cdot y'(x_n) + O(h^2) = y(x_n) + h \cdot f(x_n, y(x_n)) + O(h^2).$$

Mivel $y(x_n) = y_n$,

$$d_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = y(x_n) + h \cdot f(x_n, y(x_n)) + O(h^2) - y_n - h \cdot f(x_n, y_n) = O(h^2).$$

8.3. Tétel. Ha az f függvény a második változójában teljesíti a Lipschitz-feltételt, akkor az explicit Euler módszer konvergens.

Bizonyítás. A Taylor formulából

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \cdot y'(x_n) + O(h^2) = y(x_n) + h \cdot f(x_n, y(x_n)) + O(h^2),$$

az Euler módszerbõl

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \ .$$

A kifejezéseket kivonva

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \\ &= y(x_n) - y_n + h \cdot \left(f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n) \right) + O(h^2) \end{aligned}$$

és abszolút értéket véve

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &\le |e_n| + h \cdot |f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n)| + c \cdot h^2 \le |e_n| + hL \cdot |e_n| + O(h^2) \\ &\le (1 + hL) \cdot |e_n| + c \cdot h^2 \qquad (n = 0,1,\ldots,N-1) \end{aligned}$$

A továbbiakban teljes indukcióval belátjuk, hogy $|e_n| \le \dfrac{c}{L} h \cdot \left((1 + hL)^n - 1 \right)$.

$n = 0$-ra $e_0 = y(x_0) - y_0 = 0$, igaz az állítás.

Tegyük fel, hogy n-re igaz, bizonyítsuk $n+1$-re :

$$|e_{n+1}| \le (1+hL)\frac{c}{L}h\left((1+hL)^n - 1\right) + c\cdot h^2 =$$

$$= \frac{c}{L}h\left((1+hL)^{n+1} - (1+hL) + hL\right) = \frac{c}{L}h\left((1+hL)^{n+1} - 1\right)$$

Mivel $(1+hL)^n = \left(1+\frac{x^* - x_0}{N}L\right)^n \le \left(1+\frac{x^*}{N}L\right)^N \le e^{x^*L}$, a módszer globális hibája

$$|e_{n+1}| \le \frac{c}{L}h\left(e^{x^*L} - 1\right) = O(h),$$

továbbá elsõrendben konvergens.

8.4. Tétel. Ha egy explicit egylépéses módszer lokális hibájára $|d_n| \le c\cdot h^{p+1}$ alakú becslés adható, és az f függvény a második változójában teljesíti a Lipschitz-feltételt, akkor a globális hibája p -edrendû, azaz $|e_n| \le \tilde{c}\cdot h^p$.

Kidolgozott példák

1. Példa. Az $[1,2]$ intervallumon vizsgáljuk az explicit Euler módszert.

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Megoldás. A KÉP pontos megoldása az összehasonlításhoz: $y(x) = \dfrac{1}{x}$.

a) Például $N = 3$ esetén írjuk fel az Euler módszer közelítését.

$x_0 = 1,\ x_1 = \frac{4}{3},\ x_2 = \frac{5}{3},\ x_3 = 2,\ h = \frac{1}{3},\ y_0 = 1.$

$$y_1 = y_0 + h\left(-\frac{y_0}{x_0}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx y\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{4}$$

$$y_2 = y_1 + h\left(-\frac{y_1}{x_1}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \approx y\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{3}{5}$$

$$y_3 = y_2 + h\left(-\frac{y_2}{x_2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5} \approx y(2) = \frac{1}{2}$$

b) Vizsgáljuk az explicit Euler módszer lokális-, globális hibáját és konvergenciáját tetszõleges $N \in \mathbb{N}$ esetén.

$h := \frac{1}{N},\ x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ x_n = 1 + nh\ \ (n = 0,1,\ldots,N),\ x_N = 2.$

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)=y_n+h\cdot\frac{-y_n}{x_n}=y_n\left(1-\frac{h}{x_n}\right)=y_n\cdot\frac{x_n-h}{x_n}=y_n\cdot\frac{x_{n-1}}{x_n}$$

Lokális hibája: tegyük fel, hogy $y_n=\dfrac{1}{x_n}$ pontos,

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}=\frac{1}{x_{n+1}}-y_n\cdot\frac{x_{n-1}}{x_n}=\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{x_{n-1}}{x_n^2}=\frac{x_n^2-x_{n+1}x_{n-1}}{x_{n+1}x_n^2}=\frac{x_n^2-(x_n+h)(x_n-h)}{x_{n+1}x_n^2}=$$

$$=\frac{h^2}{x_{n+1}x_n^2}<\frac{h^2}{1}=O(h^2)$$

Globális hibája: tegyük fel, hogy $y_0=1$ pontos,

$$y_N=y_{N-1}\cdot\frac{x_{N-2}}{x_{N-1}}=y_{N-2}\cdot\frac{x_{N-3}}{x_{N-2}}\cdot\frac{x_{N-2}}{x_{N-1}}=y_{N-2}\cdot\frac{x_{N-3}}{x_{N-1}}=\ldots=y_0\cdot\frac{x_{-1}}{x_{N-1}}=$$

$$=y_0\cdot\frac{x_0-h}{x_N-h}=1\cdot\frac{1-h}{2-h}$$

$$y(2)-y_N=\frac{1}{2}-\frac{1-h}{2-h}=\frac{2-h-2(1-h)}{2(2-h)}=\frac{h}{2(2-h)}\le\frac{h}{2}=O(h)\ .$$

Tehát az explicit Euler módszer elsõrendben konvergens a megadott KÉP-ra.

2. Példa. A $[0,1]$ intervallumon vizsgáljuk az explicit Euler módszert.

$$\begin{cases} y'=y+1\\ y(0)=0\end{cases}$$

Megoldás. A KÉP pontos megoldása az összehasonlításhoz: $y(x)=e^x-1$.

a) Például $N=3$ esetén írjuk fel az Euler módszer közelítését.

$$x_0=0,\ x_1=\frac{1}{3},\ x_2=\frac{2}{3},\ x_3=1,\ h=\frac{1}{3},\ y_0=0.$$

$$y_1=y_0+h(y_0+1)=\frac{1}{3}\approx y\left(\frac{1}{3}\right)=e^{\frac{1}{3}}-1$$

$$y_2=y_1+h(y_1+1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{1}{3}+\frac{4}{9}=\frac{7}{9}\approx y\left(\frac{2}{3}\right)=e^{\frac{2}{3}}-1$$

$$y_3=y_2+h(y_2+1)=\frac{7}{9}+\frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}+1\right)=\frac{7}{9}+\frac{16}{27}=\frac{37}{27}\approx y(1)=e^1-1$$

b) Vizsgáljuk az explicit Euler módszer lokális-, globális hibáját és konvergenciáját tetszõleges $N\in\mathbb{N}$ esetén.

$$h:=\frac{1}{N},\ x_0=0,\ y_0=0,\ x_n=nh\ \ (n=0,1,\ldots,N),\ x_N=1.$$

$$y_{n+1}=y_n+h(y_n+1)=y_n(1+h)+h=(y_{n-1}(1+h)+h)(1+h)+h=$$

$$=y_{n-1}(1+h)^2+h((1+h)+h)=\ldots$$

$$y_n=y_0(1+h)^n+h\left((1+h)^{n-1}+\ldots+(1+h)+1\right)=y_0(1+h)^n+(1+h)^n-1=$$

$$=(1+h)^n-1$$

Lokális hibája: $y_n = e^{x_n} - 1$ pontos,

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \left(e^{x_{n+1}} - 1\right) - \left(\left(e^{x_n} - 1\right) + h\left(\left(e^{x_n} - 1\right) + 1\right)\right) =$$

$$= e^{x_{n+1}} - e^{x_n} - he^{x_n} - 1 + 1 + h - h = \frac{e^{x_n}}{2!}h^2 = O\left(h^2\right)$$

Globális hibája: $y_0 = 0$ pontos,

$$y(1) - y_N = \left(e^1 - 1\right) - \left((1+h)^N - 1\right) = e - (1+h)^N \le e - \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N \le \frac{3}{N} = 3h = O(h) \quad .$$

Tehát az explicit Euler módszer elsõrendben konvergens a megadott KÉP-ra.