1. **a)** Lösen Sie die folgende Gleichung in der Menge der reellen Zahlen:

 $2∙4^{x}-5∙2^{x}-3=0$ *5 Punkte*

Wir werfen mit einem Würfel fünfmal. Der einzige Modus der gewürfelten Zahlen ist 2, der Durchschnitt ist 3,6.

**b)** Bestimmen Sie die gewürfelten Zahlen! *6 Punkte*

1. Zwei Mannschaften nehmen an einer mehrtägigen Radtour teil. Morgen um 9 Uhr startet die erste Mannschaft vom Orientierungspunkt *A*, die zweite Mannschaft startet vom Orientierungspunkt *B*, und beide Gruppen fahren auf demselben Weg, in dieselbe Richtung zu dem Punkt *C*. Auf der vorher festgelegten Fahrtroute ist die Strecke zwischen den Punkten *A* und *B* 20 km lang und von Punkt *B* aus gelangt man nach 30 km zum Orientierungspunkt *C*. Die Mannschaften bewegen sich gleichförmig (also mit konstanter Geschwindigkeit). Die Durchschnittsgeschwindigkeit der ersten Gruppe ist 20 km/h, die der zweiten Gruppe ist 14 km/h.
	1. Nach welcher Zeit ist die erste Gruppe vom Punkt *C* zweimal so weit entfernt wie die zweite Gruppe? (Beim Punkt *C* stoppen die Gruppen nicht, sie gehen weiter.) *10 Punkte*

Dreiviertel der ersten Gruppe sind Jungen, $\frac{2}{5}$ der Mädchen trägt eine Brille. In der zweiten Gruppe – deren Anzahl das Doppelte der ersten Gruppe ist – sind 40% der Teilnehmer Mädchen, und unter ihnen trägt jede zweite Person eine Brille.

* 1. Der wievielte Teil der beiden Gruppen (mit allen Mitgliedern) trägt eine Brille? *4 Punkte*
1. Im rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks *ABC*: $A\left(-8;24\right)$, $B\left(48;16\right)$ und $C(0;0)$. Bezeichne *D* den zum Punkt *C* näher liegenden Vierteilungspunkt der Seitenhalbierende *CF* des Dreiecks.
	1. Wie groß ist der Winkel, den die Vektoren $\vec{AD}$ und $\vec{AF}$ einschließen? *9 Punkte*
	2. Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Punkt *C* auf der Kreislinie mit dem Durchmesser *AB* liegt. *5 Punkte*
2. Der Schachverein Pepita meldet seine Mannschaft zu einem Jugendwettbewerb an. Zehn Mitglieder des Vereins gehören zu dieser Altersgruppe: 6 Mädchen und 4 Jungen. Attila und Balázs sind Geschwister.
	1. Wie viele Möglichkeiten hat man, aus den 10 Wettkämpfern eine sechsköpfige Schachgruppe zu bilden, in der mindestens einer von den beiden Brüdern Mitglied ist? *4 Punkte*

Unter den sechs Mädchen werden drei verschiedene Geschenke verteilt. Es gibt zwei Möglichkeiten der Verlosung.

(I.) Jede Person darf nur höchstens ein Geschenk bekommen.

(II.) Eine Person darf mehrere Geschenke bekommen.

* 1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit im Fall (I.) bzw. im Fall (II.), dass Kati, die ein Mitglied der Mannschaft ist, ein Geschenk bekommt? *8 Punkte*
1. Eine Gruppe von Abiturienten macht eine geodätische (Landvermessung) Übung auf ebenem Gelände. Zwischen den Objekten *A*, *B* und *C* (Abbildung) wurden einige Entfernungen gemessen, in guter Annäherung ist $AB=42$ Meter und $AC=63$ Meter. Man möchte die Entfernung *BC* bestimmen, aber unmittelbar kann man das nicht lösen. Deswegen ist Punkt *D* auf der Seite *BC* so markiert, dass *AD* die innere Winkelhalbierende des Dreiecks *ABC* ist. Die messbare Strecke *DA* ist 39 Meter lang.
	1. Bestimmen Sie die Länge der Strecke *BC* bzw. die Größe des Winkels *BAC*! Geben Sie die Länge der Strecke *BC* auf ganze Meter gerundet an! *10 Punkte*

Nach der Übung streiten zwei Abiturienten ein bisschen. Dénes sagt, dass die innere Winkelhalbierende des Dreiecks länger sein kann, als die beiden eingeschlossenen Seiten. Csilla sagt, dass die Winkelhalbierende nur länger als eine der eingeschlossenen Seiten sein kann, aber nicht längerer als beide.

* 1. Wer hat Recht? Begründen Sie Ihre Meinung! *6 Punkte*
1. Enikő dachte an drei verschiedene positive Zahlen, und gab die folgenden Informationen über sie:

I. Die Zahlen bilden drei Glieder einer steigenden arithmetischen Folge.

II. Die Summe der dritten Potenzen der größten und der kleinsten Zahl ist 1072.

III. Die Differenz der Quadrate der größten und kleinsten Zahl ist gleich das 32-fache der Differenz der arithmetischen Folge.

* 1. Bestimmen Sie die drei Zahlen! *10 Punkte*

An einem anderen Tag dachte Enikő an vier verschiedene einstellige positive ganze Zahlen. Sie sagte, dass die größte gedachte Zahl 9 ist, und der Median der Zahlen 5 ist. Feri kann aus diesen Informationen die Zahlen nicht bestimmen, deshalb muss er tippen.

* 1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet Feri mit einem Versuch das Zahlenquartett von Enikő, wenn er solche Zahlen verwendet, die die Bedingungen erfüllen? *6 Punkte*
1. Auf dem Tisch steht ein Kasten. Er ist ein gerader Quader mit quadratischer Grundfläche, dessen Seitenkante das Doppelte der Grundkante ist. Den Kasten kann man mit einer halbkugelförmigen Schüssel (Durchmesser 30cm) genau bedecken. Das bedeutet, dass der Rand der Schüssel auf dem Tisch liegt und die vier Ecken der einen quadratischen Fläche des Kastens die Oberfläche der Schüssel berühren. (Die Achsen der Halbkugel und des Quaders stimmen überein.)
	1. Wie lang sind die Kanten des Kastens? *7 Punkte*

Die Länge der Kanten eines quadratischen geraden Quaders sind (in Zentimeter gemessen) ganze Zahlen. Die Oberfläche und das Volumen dieses Quaders sind gleich groß.

* 1. Wie lang sind die Kanten des Quaders? *9 Punkte*
1. Die Funktionen *f*, *g* und *h* sind in der Menge der reellen Zahlen definiert, und man kennt die folgenden Informationen:

I. Die Graphen der linearen Funktionen *g* und *h* sind aufeinander senkrecht stehende Geraden.

II. Die zwei Geraden schneiden die *y*-Achse im Punkt $(0;3)$.

III. Die Nullstelle der Funktion $g°h$ ist $x=9$.

Die Definition der zusammengesetzten Funktion $g°h$ ist: $\left(g°h\right)\left(x\right)=g\left(h\left(x\right)\right) $.

* 1. Geben Sie die Zuordnungsvorschrift der Funktionen *g* und *h* an, und weisen Sie nach, dass die Funktionsgleichung der Funktion $f:x↦-x^{2}+\frac{9}{2}x+9$ ist, wenn $f=g∙h$ ist. *11 Punkte*
	2. Schreiben Sie die Gleichung der Tangente im Punkt mit der Abszisse $x=2$ der Funktion *f* auf!

 *5 Punkte*

1. **a)** Beweisen Sie die folgende Aussage: Die Differenz der Kehrwerte von benachbarten positiven ganzen Zahlen ist gleich dem Kehrwert des Produktes der Zahlen. (Man subtrahiert die kleinere Zahl von der größeren Zahl.) *3 Punkte*

Schauen wir die unendliche Reihe $\frac{1}{10∙12}+\frac{1}{12∙14}+\frac{1}{14∙16}+…$ an. (Vom zweiten Glied an sind die einzelnen Faktoren der Nenner immer um 2 größer als die Faktoren im vorigen Nenner.)

**b)** Beweisen Sie, dass der Wert der *n*-ten Partialsumme der Reihe $S\_{n}=\frac{n}{100+20n}$ ist. *10 Punkte*

($S\_{n}$ bezeichnet die Summe der ersten *n* Glieder der Reihe.)

**c)** Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\_{n\to \infty }S\_{n}$! *3 Punkte*