

# Deutschsprachiger Wettbewerb

2017 / 2018

## Mathematik

2. Runde

Jahrgang 12



Liebe Schülerin, lieber Schüler,

diese Runde des Wettbewerbs hat 20 Fragen, Sie sollen von den vorgegebenen Lösungsmöglichkeiten immer die einzige richtige Lösung auswählen. Sie können auf Ihrem Blatt die richtige Lösung ankreuzen. Danach tragen Sie bitte Ihre Lösungen in das Lösungsblatt (extra Blatt) ein. Nur diese Seite wird korrigiert.

Für eine richtige Antwort erhalten Sie 3 Punkte, für eine falsche Antwort wird Ihnen 1 Punkt abgezogen.

Wenn Sie sich für keine Antwort entscheiden können und auf dem Lösungsblatt eine Lösung leer lassen, bekommen Sie keinen Punkt. Ihre Ausgangspunktzahl ist 20.

Für die Lösung der Aufgaben dürfen Sie Ihren Taschenrechner und Ihr Tafelwerk benutzen.

Sie haben 90 Minuten Zeit, um den Test auszufüllen und die richtigen Lösungen ins Lösungsblatt einzutragen!

Viel Erfolg!

1. Wie viele Punkte mit ganzzahligen Koordinaten liegen auf einer Kugel, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt und die den Radius 3 hat?

- (A) 30                      (B) 24                      (C) 12                      (D) 6                      (E) 3

2. Bei welcher der angegebenen Funktionen ist das Minimum 2?

(A)  $x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$

(C)  $x \mapsto -|x - 1| + 2$

(B)  $x \mapsto \frac{x^3 + 2x}{x}$

(D)  $x \mapsto x^2 - 6x + 11$

(E) bei keiner dieser Funktionen

3. Es gilt  $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$ , wobei  $x$  und  $y$  ganzzahlig sind. Wie groß ist  $x$ ?  
(A) 0 (B) 3 (C) -1 (D) 1 (E) 2
4. Wie groß ist  $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 358^\circ + \cos 359^\circ$ ?  
(A) 1 (B)  $\pi$  (C) 0 (D) 10 (E) -1
5. Auf einer Insel wohnen Lügner (die immer lügen) und Edle (die immer die Wahrheit sagen). Ein Inselbewohner A behauptet nach Anfrage, dass von ihm und einem weiteren Bewohner B mindestens einer ein Lügner wäre. Welche der folgenden Aussagen stimmt?  
(A) A kann diese Aussage nicht treffen. (D) A ist ein Lügner und B ist ein Edler.  
(B) A und B sind beide Lügner. (E) B ist ein Lügner und A ist ein Edler.  
(C) A und B sind beide Edle.
6. Wie groß ist der spitze Winkel in einem Rhombus, in dem die Seitenlänge das geometrische Mittel der beiden Diagonalenlängen ist?  
(A)  $15^\circ$  (B)  $30^\circ$  (C)  $45^\circ$  (D)  $60^\circ$  (E)  $75^\circ$
7. Der maximale Wert von  $f(x) = |5\sin x - 3|$  für  $x \in \mathbf{R}$  ist  
(A) 2 (B) 3 (C)  $\pi$  (D)  $5\pi$  (E) 8
8. Berechne  $x^2 + y^2 + z^2$ , wenn  $x + y + z = 1$  und  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$  gelten.  
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Es kann nicht berechnet werden.
9. Es ist bekannt, dass  $\lg(\sqrt{2017} + \sqrt{2007}) = k$ . Welchen Wert nimmt dann der Ausdruck  $\lg(\sqrt{2017} - \sqrt{2007})$  an?  
(A)  $k - 1$  (B)  $1 - k$  (C)  $\frac{1}{k}$  (D)  $k + 1$   
(E) Es kann aus der gegebenen Information nicht eindeutig bestimmt werden.
10.  $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}} =$   
(A)  $\frac{999}{1000}$  (B)  $\frac{99}{100}$  (C)  $\frac{9}{10}$  (D) 9 (E) 1
11. Wir kennen drei Primzahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  mit  $a > b > c$ . Wenn  $a + b + c = 78$  und  $a - b - c = 40$  ist, dann gilt  $a \cdot b \cdot c =$   
(A) 438 (B) 590 (C) 1062 (D) 1239 (E) 2006
12. Bei einer Universitätsaufnahmeprüfung müssen Studenten mindestens 80% der gestellten Fragen richtig beantworten. Peter hat bisher 15 Fragen bearbeitet, wovon er 5 nicht beantworten konnte, aber die restlichen 10 richtig beantwortete. Wenn er alle verbleibenden Fragen richtig beantwortet, besteht er die Prüfung mit genau 80%. Aus wie vielen Fragen besteht die Prüfung?  
(A) 20 (B) 25 (C) 30 (D) 35 (E) 40

**13.** Sechzehn Mannschaften spielen in einer Volleyball-Liga. Im Verlauf der Meisterschaft spielt jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere. Die Siegermannschaft bekommt in jedem Spiel einen Punkt und die Verlierermannschaft 0 Punkte. Unentschieden kommt nicht vor. Nachdem alle Spiele absolviert wurden, bilden die Punktergebnisse aller Mannschaften eine arithmetische Folge. Wie viele Punkte hat die Mannschaft, die in der Tabelle an letzter Stelle steht?

- (A) 3 (D) Die beschriebene Situation ist unmöglich.  
 (B) 2 (E) Die Antwort ist eine andere Zahl als angegeben.  
 (C) 1

**14.** Zu einem Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 1 werden alle Quadrate gezeichnet, die mit ABCD mindestens 2 Eckpunkte gemeinsam haben. Wie groß ist die Fläche, die von diesen Quadraten abgedeckt wird?

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

**15.** Wenn  $f(x) = \frac{2x}{3x+4}$  und  $f(g(x)) = x$  gelten, dann gilt

- (A)  $g(x) = \frac{3x+4}{2x}$  (C)  $g(x) = \frac{2x+4}{4x}$  (E)  $g(x)$  hat eine andere Form.  
 (B)  $g(x) = \frac{3x}{2x+4}$  (D)  $g(x) = \frac{4x}{2-3x}$

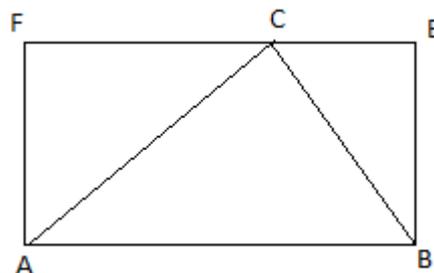
**16.** Die monoton steigende Folge 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, ... enthält alle Dreierpotenzen und alle Zahlen die als Summe von (beliebig vielen) paarweise verschiedenen Dreierpotenzen geschrieben werden können. Was ist die hundertste Zahl dieser Folge?

- (A) 150 (B) 981 (C) 1234 (D) 2401 (E)  $3^{100}$

**17.** In dem nebenstehenden Rechteck ABEF ist C ein innerer Punkt der Seite EF. Wir wissen, dass der Winkel  $\sphericalangle ACF$  genauso groß ist wie der Winkel  $\sphericalangle CBE$ .

Wenn  $FC = 4$  und  $CE = 3$ , dann beträgt die Fläche des Dreiecks ABC

- (A) 12 (D)  $7\sqrt{3}$   
 (B) 14 (E) ein anderer Wert  
 (C)  $6\sqrt{2}$



**18.** Welche der 5 Funktionsgleichungen bestimmt eine Funktion, deren Graph die y-Achse als Symmetrieachse hat?

- (A)  $y = x^2 + 2x$  (C)  $y = x \cdot \cos x$  (E)  $y = x^3$   
 (B)  $y = x^2 \cdot \sin x$  (D)  $y = x \cdot \sin x$

**19.** Susi hat zwei Anhänger aus demselben Material. Sie sind gleich dick und gleich schwer. Einer hat die Form eines Kreisrings mit Außenradius 8 cm und Innenradius 6 cm. Der zweite hat die Form eines Kreises. Was ist der Radius des zweiten Anhängers?

- (A) 5 cm                                      (C) 6 cm                                      (E)  $2\sqrt{3}$  cm  
(B)  $2\sqrt{5}$  cm                                      (D)  $2\sqrt{7}$  cm

**20.** Wie viele  $x$ -Werte erfüllen die folgende Gleichung, wenn  $0 \leq x \leq \pi$ ?

$$\operatorname{tg}^4 x - 2 \cdot \operatorname{tg}^3 x + 2 \cdot \operatorname{tg}^2 x - 2 \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 0$$

- (A) 0                                      (B) 1                                      (C) 2                                      (D) 3                                      (E) 4