

Deutschsprachiger Wettbewerb
2019 / 2020
Mathematik
2. Runde
Jahrgang 12



Liebe Schülerin, lieber Schüler,

diese Runde des Wettbewerbs hat 20 Fragen, Sie sollen von den vorgegebenen Lösungsmöglichkeiten immer die einzige richtige Lösung auswählen. Sie können auf Ihrem Blatt die richtige Lösung ankreuzen. Danach tragen Sie bitte Ihre Lösungen in das Lösungsblatt (extra Blatt) ein. Nur diese Seite wird korrigiert.

Für eine richtige Antwort erhalten Sie 3 Punkte, für eine falsche Antwort wird Ihnen 1 Punkt abgezogen.

Wenn Sie sich für keine Antwort entscheiden können und auf dem Lösungsblatt eine Lösung leer lassen, bekommen Sie keinen Punkt. Ihre Ausgangspunktzahl ist 20.

Für die Lösung der Aufgaben dürfen Sie Ihren *Taschenrechner* und Ihr *Tafelwerk* benutzen.

Sie haben 90 Minuten Zeit, um den Test auszufüllen und die richtigen Lösungen ins Lösungsblatt einzutragen!

Viel Spaß

1. Anna hat zwei aufeinanderfolgende Elemente einer geometrischen Folge aufgeschrieben: $2 + \sqrt{3}$ und $2\sqrt{5} + \sqrt{15}$. Was könnte das dritte Glied sein?

(A) $10 - \sqrt{15}$

(C) $2\sqrt{5} + \sqrt{15}$

(E) $10 + \sqrt{75}$

(B) $2\sqrt{5} + 5$

(D) $4\sqrt{5} + \sqrt{15}$

2. Das Verhältnis der Radien von Kreissektor und Inkreis des Kreissektors beträgt $3 : 1$. Das Verhältnis ihrer Flächen beträgt dann

(A) $5 : 4$

(C) $3 : 2$

(E) $6 : 5$

(B) $4 : 3$

(D) $5 : 3$



3. Wie viele von den folgenden Aussagen sind wahr?

- I. Die nullte Potenz aller reellen Zahlen beträgt 1.
- II. Der Logarithmus einer positiven Zahl kann nicht größer als die Zahl selbst sein.
- III. Es gibt reelle Zahlen, bei denen zwei Logarithmen zu unterschiedlicher Basis übereinstimmen.
- IV. Die dritte Wurzel aller reellen Zahlen ist gleich der sechsten Wurzel ihres Quadrats.
- V. Aus der Gleichung $a^x = b$ lässt sich x eindeutig bestimmen, wenn a und b beliebige positive reelle Zahlen sind.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

4. Wie viele nichtleere Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ haben die Eigenschaft, dass die Summe aus dem größten und dem kleinsten Element gleich 10 ist?

(A) 170 (B) 512 (C) 128 (D) 511 (E) 682

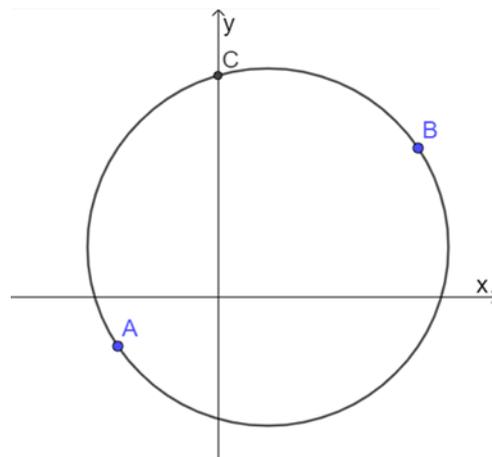
5. In der Folge (a_n) ist jede Summe dreier aufeinanderfolgenden Glieder gleich 2020. Es ist bekannt, dass $a_{1010} = 1010$ und $a_{2019} = 2019$ ist. Dann ist $a_{2020} =$

(A) 2020 (B) -2020 (C) -1009 (D) 0 (E) 1020

6. In der Abbildung sehen wir einen Kreis mit dem Durchmesser AB und den darauf liegenden Punkt C . Die Koordinaten der Punkte sind $A(-2; -1)$, $B(4; 3)$ und $C(0; c)$.

Bestimme den Wert von c .

- (A) $2\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{13} - 1$
 (B) $\sqrt{13}$ (E) 4,5
 (C) $1 + \sqrt{12}$



7. Gegeben ist ein Würfel. Wie viele Ebenen gibt es, die mindestens drei Eckpunkte dieses Würfels enthalten?

(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 20 (E) 28

8. Die Folge (a_n) beginnt mit $a_1 = 2019$. Für $n \geq 1$ erhält man das Folglied a_{n+1} indem man 1 zur Ziffernsumme von a_n addiert und dieses Ergebnis quadriert.

So gilt dann z.B. $a_2 = (2 + 0 + 1 + 9 + 1)^2 = 169$. Bestimme a_{2020} .

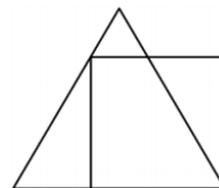
(A) 25 (B) 64 (C) 121 (D) 289 (E) 400

9. Die Kantenlängen eines Quaders bilden in cm gemessen eine geometrische Folge ganzer Zahlen mit dem Quotienten 3. Welche der folgenden Maßzahlen kann das Volumen des Quaders sein?

(A) 120 cm^3 (B) 216 cm^3 (C) 243 cm^3 (D) 270 cm^3 (E) 810 cm^3

10. Der Umfang des Quadrats in der Figur ist 4. Dann ist der Umfang des gleichseitigen Dreiecks

- (A) 4 (C) 3 (E) $4 + \sqrt{3}$
 (B) $3 + \sqrt{3}$ (D) $3 + \sqrt{2}$



11. Wie viele verschiedene reelle Lösungen hat die Gleichung $(x^2 - 4x + 5)^{x^2 + x - 30} = 1$?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) unendlich viele

12. Die Bevölkerung Arnbergs stieg in den letzten 20 Jahren um 40%. In Berghausen stieg die Bevölkerung im selben Zeitraum um 60%. Insgesamt stieg die Bevölkerung der beiden Orte um 54%. Wie war das Verhältnis der Einwohnerzahlen vor 20 Jahren?

- (A) 10 : 13 (B) 20 : 27 (C) 3 : 7 (D) 7 : 12 (E) 2 : 3

13. Das geometrische Mittel von n Zahlen ist definiert als die n -te Wurzel aus dem Produkt aller n Zahlen, also $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$. Wir haben sechs Zahlen. Das geometrische Mittel von drei davon ist 3, das geometrische Mittel der drei anderen ist 12. Wie groß ist das geometrische Mittel dieser sechs Zahlen?

- (A) 4 (B) 6 (C) $\frac{15}{2}$ (D) $\frac{15}{6}$ (E) 36

14. Die Aussagen (A) – (E) werden der Reihe nach auf ihre Wahrheit überprüft. Welche davon ist die erste wahre Aussage?

- (A) (C) ist wahr. (C) (E) ist falsch. (E) $1 + 1 = 2$
 (B) (A) ist wahr. (D) (B) ist falsch.

15. Anna wählt eine positive ganze Zahl n und notiert die Summe aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n . Eine Primzahl p teilt diese Summe, aber keinen der Summanden. Welche der folgenden Zahlen ist ein möglicher Wert von $n + p$?

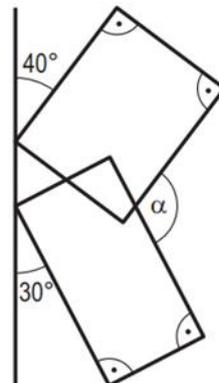
- (A) 217 (B) 221 (C) 229 (D) 245 (E) 269

16. Wie viele reelle Lösungen hat die Gleichung $\|4^x - 3\| - 2\| = 1$?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

17. Zwei Rechtecke schließen mit der senkrechten Linie die Winkel 40° bzw. 30° ein (siehe Figur). Wie groß ist der Winkel α ?

- (A) 105° (C) 130° (E) ein anderer Wert
 (B) 120° (D) 135°

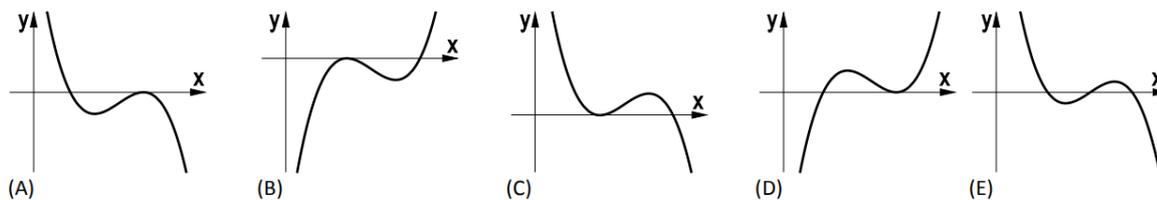


18. Das Siegerteam eines Fußballspiels erhält 3 Punkte und das Verliererteam 0 Punkte. Bei einem Unentschieden erhalten die Teams je einen Punkt. Vier Teams A, B, C und D spielen ein Turnier. Jedes Team spielt genau einmal gegen jedes andere Team. Am Ende des Turniers hat das Team A 7 Punkte, und die Teams B und C haben je 4 Punkte. Wie viele Punkte hat das Team D?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

19. Unter den unten abgebildeten Graphen befindet sich auch der Graph der Funktion

$f(x) = (a - x) \cdot (b - x)^2$ mit $a < b$. Welcher ist es?



20. Julian hat einen Algorithmus geschrieben, um eine Zahlenfolge zu bilden. Es gilt $a_1 = 1$ und $a_{m+n} = a_m + a_n + m \cdot n$ für alle positiven ganzen Zahlen m und n . Bestimme den Wert von a_{100} .

- (A) 100 (B) 1000 (C) 2020 (D) 4950 (E) 5050