

Deutschsprachiger Wettbewerb

2021 / 2022

Mathematik

2. Runde

Jahrgang 12



Liebe Schülerin, lieber Schüler,

diese Runde des Wettbewerbs hat 20 Fragen, Sie sollen von den vorgegebenen Lösungsmöglichkeiten immer die einzige richtige Lösung auswählen. Sie können auf Ihrem Blatt die richtige Lösung ankreuzen. Danach tragen Sie bitte Ihre Lösungen in das Lösungsblatt (extra Blatt) ein. Nur diese Seite wird korrigiert.

Für eine richtige Antwort erhalten Sie 3 Punkte, für eine falsche Antwort wird Ihnen 1 Punkt abgezogen.

Wenn Sie sich für keine Antwort entscheiden können und auf dem Lösungsblatt eine Lösung leer lassen, bekommen Sie keinen Punkt. Ihre Ausgangspunktzahl ist 20.

Für die Lösung der Aufgaben dürfen Sie Ihren *Taschenrechner* und Ihr *Tafelwerk* benutzen.

Sie haben 90 Minuten Zeit, um den Test auszufüllen und die richtigen Lösungen ins Lösungsblatt einzutragen!

Viel Spaß

1. Wähle die Negation folgender Aussage aus: „Alle Schüler mögen Mathe.“

- (A) Kein Schüler mag Mathe.
- (B) Es gibt solchen Schüler, der Mathe mag.
- (C) Es gibt solchen Schüler, der Mathe nicht mag.
- (D) Es existiert kein solcher Schüler, der Mathe mag.
- (E) Alle Schüler hassen Mathematik.

2. Kapitän Eisenbart multipliziert sein Lebensalter, die Länge seines Schiffes und das Lebensalter seines Sohnes. (Die Länge wurde in Metern gemessen und ist eine ganze Zahl.) Das Ergebnis wurde 26159. Wie alt ist der Kapitän?

- (A) 1
- (B) 7
- (C) 31
- (D) 37
- (E) 77

3. Heinrich hat beim Schach in 40 Spielen insgesamt 25 Punkte erzielt. Für einen Sieg gab es 1 Punkt, für ein Unentschieden $\frac{1}{2}$ Punkt und bei einem verlorenen Spiel 0 Punkte. Wie viele Spiele hat Heinrich mehr gewonnen als verloren?

- (A) 7
- (B) 10
- (C) 12
- (D) 15
- (E) Das ist nicht eindeutig bestimmt.

4. Vereinfache den folgenden Ausdruck: $k^{\frac{\lg(\lg k)}{\lg k}}$.

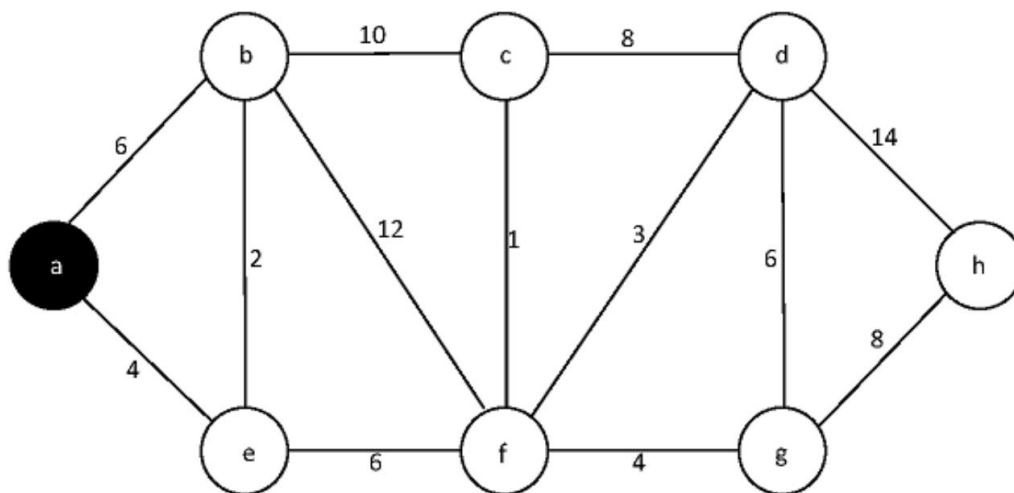
- (A) k (B) 1 (C) $\lg^2 k$ (D) $\lg k$ (E) $k^{\lg k}$

5. Der Würfel rechts ist etwas speziell. Die Summen einander gegenüberliegender Zahlen sind allesamt gleich. Außerdem sind die drei Zahlen, die der 14, 18 bzw. der 35 gegenüberliegen, Primzahlen. Welche Primzahl liegt der 14 gegenüber?



- (A) 41 (B) 37 (C) 31 (D) 29 (E) 23

6. Zwischen 8 Städten (a, b, c, d, e, f, g, h) wird das Autobahnnetz ausgebaut. Unabhängige Analysten haben geschätzt, mit welchen Baukosten bei den einzelnen Strecken zu rechnen ist. Die auf dem Graph stehenden Zahlen zeigen dies in Millionen €. Nicht alle Strecken sollen ausgebaut werden, aber alle Städte müssen von allen anderen Städten erreichbar sein. Bestimme, wie viel Geld beim Bauprojekt nötig war, wenn die Baukosten minimalisiert wurden.



- (A) 24 Mio € (B) 25 Mio € (C) 28 Mio € (D) 30 Mio € (E) 32 Mio €

7. Gegeben ist die Folge a_n durch $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ und $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ für $n \geq 1$. Wie viele der ersten 2022 Folgenglieder sind gerade Zahlen?

- (A) 673 (B) 674 (C) 1010 (D) 1011 (E) 1348

8. Wie viele reelle Lösungen hat die Gleichung $||4^x - 3| - 2| = 1$?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

9. Judith hat sich zum Geburtstag von ihrem Onkel, der Konditor ist, eine kegelförmige Sahnetorte gewünscht. Bei der Geburtstagsfeier will sie die Leckerei mit ihren beiden Brüdern teilen. In welchen Höhen muss Judith parallel zur Grundfläche die Torte zerschneiden, wenn jedes der drei Kinder genau ein Drittel bekommen soll und die Torte 12 cm hoch ist?

- (A) ca. 8 cm und ca. 4 cm (D) ca. 5,2 cm und ca. 2,1 cm
 (B) ca. 7,6 cm und ca. 4,3 cm (E) ca. 3,7 cm und ca. 1,5 cm
 (C) ca. 6 cm und ca. 3 cm

10. Aus den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7 lassen sich insgesamt $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ verschiedene 7-stellige Zahlen bilden, wenn dabei jede Ziffer stets genau einmal verwendet wird. Ich stelle mir diese Zahlen mit der kleinsten beginnend der Größe nach geordnet vor. Welche Zahl steht an der 2520. Stelle?

- (A) 3 765 421 (B) 4 123 567 (C) 3 217 654 (D) 4 321 765 (E) 4 376 521

11. Welches ist die **erste** wahre Aussage, wenn man die Reihenfolge (A), (B), (C), (D), (E) betrachtet?

- (A) Aussage (C) ist wahr. (C) Aussage (E) ist falsch. (E) $1 + 1 = 2$
 (B) Aussage (A) ist wahr. (D) Aussage (B) ist falsch.

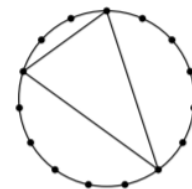
12. Das n -te Glied ($n > 1$) der Folge a_n ist die Summe der ersten $n - 1$ Glieder. Welche Aussage ist **falsch**, wenn $a_1 = 1$ ist?

- (A) $S_{n-1} = a_n$ (D) Die Folge ist monoton steigend, aber nicht streng monoton steigend.
 (B) $a_4 = 4$
 (C) $a_n = 2^{n-1}$ (wenn $n > 1$ ist) (E) $a_{20} = \sqrt{a_{19} \cdot a_{21}}$

13. Es werden zwei (faire) Würfel gleichzeitig geworfen. Die Würfel haben jeweils zwei rote, zwei blaue und zwei weiße Seiten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mit beiden Würfeln verschiedene Farben gewürfelt werden?

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{5}{6}$ (E) $\frac{1}{2}$

14. Auf einem Kreis sind 15 Punkte so markiert, dass benachbarte Punkte stets denselben Abstand voneinander haben. Verbindet man drei dieser Punkte, so entsteht ein Dreieck. Wie viele verschiedene, nicht kongruente Dreiecke lassen sich so zeichnen?



- (A) 15 (B) 19 (C) 23 (D) 46 (E) 75

15. Man wählt eine Zahl $a \in \mathbb{N}$ aus, für die gilt: $1 \leq a \leq 2022$. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass a^a eine Quadratzahl ist?

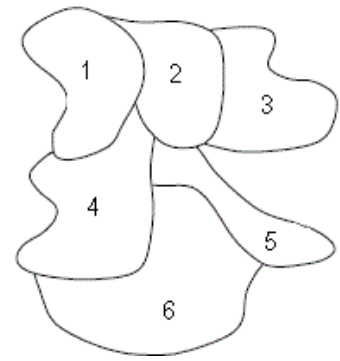
- (A) $\frac{1001}{2022}$ (B) $\frac{1022}{2022}$ (C) $\frac{1029}{2022}$ (D) $\frac{1033}{2022}$ (E) $\frac{1086}{2022}$

16. Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen definiert. Es gilt $f(1) = 2$ und für alle reellen Zahlen x und y gilt $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$. Dann ist $\frac{f(2022)}{f(2020)} =$

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 2021 (E) $\frac{2022}{2020}$

17. In einer abgelegenen Urwaldregion leben die Stämme der At, der Bo, der Cmer, der Dio, der Ela und der Fu in jeweils einem Gebiet, dessen Grenzverlauf die abgebildete Landkarte wiedergibt.

Ein in der Gegend forschender Ethnograph (Völkerkundler) fragt seinen einheimischen Begleiter, welcher Stamm in welchem Gebiet lebt. Dieser - ein Geheimniskrämer - informiert ihn so:



- Die At und die Bo sind keine Nachbarn.
- Die Cmer haben weniger Nachbarn als die Bo.
- Die benachbarten Dio und At haben gleich viele Nachbarn.
- Die Fu haben mehr Nachbarn als die Ela.

Zwei Stämme heißen benachbart, wenn ihre Stammesgebiete eine gemeinsame Grenze besitzen.

In welchem Gebiet leben die Fu?

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

18. Eine Folge wird so gebildet, dass ab dem dritten Glied jedes Glied gleich der letzten Ziffer des Produktes aus den beiden vorherigen Gliedern ist. Die ersten Glieder der Folge lauten also 1; 2; 2; 4; 8; ; ; ;

Was ist das 2022-te Glied der Folge?

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

19. Melcsi hat 3 Kuchen und Szabolcs hat einen. Sie spielen ein Zufallsexperiment, bei dem Melcsi mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ und Szabolcs mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ gewinnt. Bei der ersten Runde ist der Einsatz ein Kuchen, bei der zweiten 2 Kuchen und so weiter. Das Spiel wird so lange fortgesetzt, bis einer alle vier Kuchen besitzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Kuchen in den Besitz von Melcsi kommen?

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{5}{9}$ (C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{2}{9}$ (E) $\frac{2}{3}$

20. Die Seite AB eines rechteckigen Fußballplatzes $ABCD$ ist 65 m lang. In der Mitte dieser Seite steht ein 7 m breites Tor. Vom Punkt P der Seite BC sieht man das Tor unter dem größten Winkel. Wie groß ist etwa dieser größte Winkel?

- (A) $6,2^\circ$ (B) $12,4^\circ$ (C) 15° (D) 30°
 (E) Man kann aus diesen Angaben den gefragten Winkel nicht bestimmen.