

Deutschsprachiger Wettbewerb
2022 / 2023
Mathematik
2. Runde
Jahrgang 12



Liebe Schülerin, lieber Schüler,

diese Runde des Wettbewerbs hat 20 Fragen, Sie sollen von den vorgegebenen Lösungsmöglichkeiten immer die einzige richtige Lösung auswählen. Sie können auf Ihrem Blatt die richtige Lösung ankreuzen. Danach tragen Sie bitte Ihre Lösungen in das Lösungsblatt (extra Blatt) ein. Nur diese Seite wird korrigiert.

Für eine richtige Antwort erhalten Sie 3 Punkte, für eine falsche Antwort wird Ihnen 1 Punkt abgezogen.

Wenn Sie sich für keine Antwort entscheiden können und auf dem Lösungsblatt eine Lösung leer lassen, bekommen Sie keinen Punkt. Ihre Ausgangspunktzahl ist 20.

Für die Lösung der Aufgaben dürfen Sie Ihren *Taschenrechner* und Ihr *Tafelwerk* benutzen.

Sie haben 90 Minuten Zeit, um den Test auszufüllen und die richtigen Lösungen ins Lösungsblatt einzutragen!

Viel Spaß

1. Wie groß ist das Produkt $p \cdot n$, wenn p und n ganze Zahlen sind, die größer als 1 sind und folgendes gilt: $1 + p + p^2 + p^3 + \dots + p^n = 2801$?

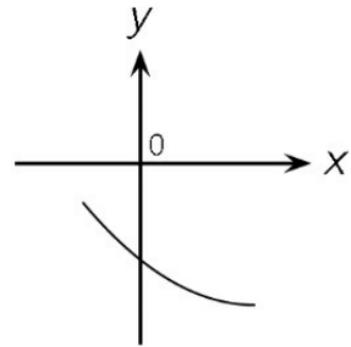
- (A) 15 (B) 21 (C) 28 (D) 36 (E) 45

2. Andrea wurde 1997 und ihre Schwester Charlotte 2001 geboren. Dann beträgt der Altersunterschied zwischen den beiden Schwestern ganz gewiss

- (A) weniger als 4 Jahre (D) mehr als 4 Jahre
(B) mindestens 4 Jahre (E) nicht weniger als 3 Jahre
(C) genau 4 Jahre

3. Durch welche der fünf unten genannten Zahlen ist die Summe $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ nicht teilbar?

- (A) 20 (C) 35 (E) 105
 (B) 21 (D) 66



4. Von einer Parabel mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ ist ein Stück dargestellt. Welcher der folgenden Ausdrücke ist positiv?

- (A) c (B) $b + c$ (C) ac (D) bc (E) ab

5. Von einem würfelförmigen Eisberg befinden sich genau 90% des Volumens unter Wasser. Nur eine Würfecke ragt aus dem Wasser. Die Längen der drei nur teilweise sichtbaren Kantenstücke sind 24 m, 25 m und 27 m. Wie lang ist eine Würfelkante?

- (A) 30 m (B) 33 m (C) 34 m (D) 35 m (E) 39 m

6. Die Intensität einer Röntgenstrahlung nimmt beim Durchdringen von Aluminiumplatten mit einer Dicke von 1 mm um 25% ab. Wie viele solcher 1 mm dicken Platten werden benötigt, um nur noch 1% der Strahlung durchzulassen?

- (A) 3 (B) 4 (C) 15 (D) 16 (E) 18

7. Die Glieder der folgenden Folgen wiederholen sich regelmäßig. Unter der Periode versteht man die Anzahl der sich wiederholenden Glieder. Wie groß ist die Summe der Perioden der folgenden Folgen ($n \in \mathbb{N}^+$)?

$a_n =$ der Logarithmus zur Basis 2 von der letzten Ziffer von 2^n

$b_n =$ der Rest einer positiven ganzen Zahl n beim Teilen durch 5

$c_n =$ die letzte Ziffer der Zahl n^3

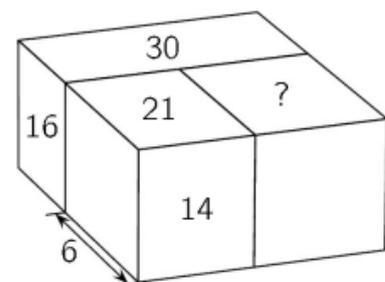
$d_n = 2 \cdot \sin(n \cdot 30^\circ) \cdot \cos(n \cdot 30^\circ)$

- (A) 12 (B) 20 (C) 25 (D) 27 (E) 30

8. Wie viele Glieder der geometrischen Folge $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ liegen zwischen 50 und 500?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

9. Drei Quader werden wie abgebildet zu einem großen Quader zusammengesetzt. Einer der Quader hat die Breite 6, und die Flächeninhalte einiger Seitenflächen sind gleich 14, 16, 21 und 30 (siehe Abbildung). Wie groß ist der Flächeninhalt der Seitenfläche mit dem Fragezeichen?



- (A) 18 (B) 24 (C) 28 (D) 30
 (E) kann aus den Angaben nicht eindeutig bestimmt werden

10. Zwei Spielwürfel haben je zwei rote, zwei blaue und zwei weiße Seiten. Die Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide dieselbe Farbe zeigen?

- (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{9}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{2}{9}$ (E) $\frac{1}{3}$

11. Wie viele Ziffern besitzt die folgende Potenz $(2^{22})^5 \cdot (5^{55})^2$ im Zehnersystem?

- (A) 22 (B) 55 (C) 77 (D) 110 (E) 111

12. Wie viele aus ganzen Zahlen bestehende Zahlentripel $(a; b; c)$ gibt es, für die gilt:

$$a > b > c > 1 \text{ und } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1 ?$$

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) unendlich viel

13. Biber codiert Buchstaben mit den zwei Ziffern „0“ und „1“ auf folgende Weise:

$$R = „1”$$

$$S = „011”$$

$$T = „010”$$

So steht zum Beispiel der Code „01011011“ für die Zeichenkette „TRRS“. Nun möchte Biber seinem System einen weiteren Buchstaben, den Buchstaben „U“ hinzufügen. Er braucht dazu für den Buchstaben „U“ eine Codierung, die keine Mehrdeutigkeiten zulässt. Er kann dafür z. B. nicht „11“ nehmen, weil sonst „RR“ und „U“ den gleichen Code „11“ hätten. Welcher Code ist für „U“ möglich?

- (A) U = „101” (C) U = „01110” (E) U = „11”
 (B) U = „110” (D) U = „00”

14. Eine Folge f_n ist durch $f_1 = 1$, $f_2 = 3$ und $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ für $n \geq 1$ gegeben. Wie viele der ersten 2020 Folgenglieder sind gerade?

- (A) 673 (B) 674 (C) 1010 (D) 1011 (E) 1347

15. Bestimmen Sie den genauen Wert des Ausdrucks:

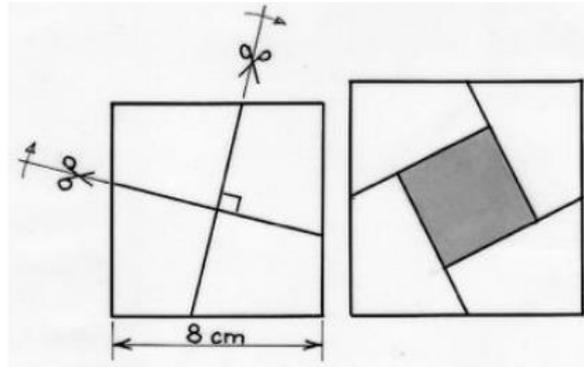
$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$$

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$ (E) π

16. Gesucht sind Paare natürlicher Zahlen a und b mit $a > b$ und folgender Eigenschaft: Addiert man die Summe, das Produkt und die Differenz dieser Zahlen, so erhält man 2023. Welcher aus den unten angegebenen Werten kann das Produkt $a \cdot b$ sein?

- (A) 1785 (B) 1612 (C) 1586 (D) 1568 (E) 1495

17. Durch zwei zueinander orthogonale Geraden kann ein Quadrat in vier kongruente Teile zerlegt werden. Diese Teile lassen sich zu einem größeren Quadrat zusammenfügen, wobei in der Mitte ein leeres Quadrat entsteht. Man führt eine solche Zerlegung mit einem Quadrat der Seitenlänge 8 cm so durch, dass die fünf Teilflächen des größeren Quadrats denselben Flächeninhalt haben. Wie lang sind dann die Seiten der vier kongruenten Teilfiguren?



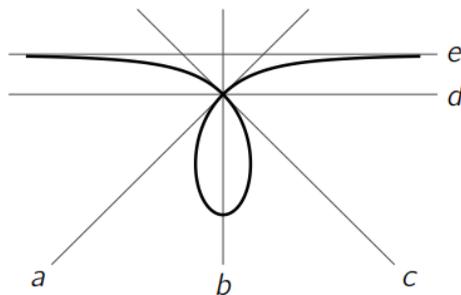
Die genauen Werte der Seitenlängen in cm angegeben sind:

- (A) 3; 5; 5; 5 (C) 2; $2\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$; 6 (E) 2; $2\sqrt{5}$; $3\sqrt{3}$; 6
 (B) 3; 4; 5; 6 (D) 3; $3\sqrt{3}$; 5; $5\sqrt{2}$

18. Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen beträgt 10^{2023} . Wie lautet die mittlere dieser Zahlen?

- (A) 10^{2018} (C) 2^{2022} (E) 10^{2022}
 (B) $2 \cdot 10^{2022}$ (D) 5^{2022}

19. Die Abbildung zeigt fünf Geraden und eine sogenannte *algebraische Kurve*, die aus genau denselben Punkten $(x; y)$ besteht, welche die Gleichung $x^3 + y^3 = 2xy$ erfüllen. Eine der fünf Geraden ist die x -Achse des Koordinatensystems. Welche?



- (A) a (B) b (C) c (D) d (E) e

20. Gegeben ist die Funktion f , die in der Menge der ganzen Zahlen definiert ist. Man weiß, dass $f(4) = 6$ bzw. für jede ganze Zahl x gilt, dass $x \cdot f(x) = (x - 3) \cdot f(x + 1)$. Wie groß ist das folgende Produkt: $f(4) \cdot f(7) \cdot f(10) \cdot \dots \cdot f(2011) \cdot f(2014) \cdot f(2017) \cdot f(2020) \cdot f(2023)$?

- (A) 2022 (C) $2022 \cdot 2023$ (E) 2023!
 (B) 2023 (D) 2022!