

Elektromágneses hullámeqyenlet

Valódi töltésektől és vezetési áramoktól mentes szigetelőkre ($\mu_r \approx 1$) az egyenletek:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot \vec{H} = 0$$

Az anyagegyenletek továbbá: $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$ $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$

Felhasználva az összefüggést: $\nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \Delta \vec{u}$

Ezekből levezethetők a homogén hullámeqyenletek a térerősségekre:

Bármely komponensre (i lehet x , y , vagy z):

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta \vec{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial z^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2} = 0$$

Összehasonlítva az általános homogén hullámeqyenlettel egy tetszőleges u mennyiségre:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \left(\Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \right) \quad \Delta: \text{Laplace operátor}$$

Az általános alakban v a hullám terjedési sebessége, tehát az elektromágneses hullámra:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \quad \text{amely vákuum esetén: } c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{a fény sebessége vákuumban})$$

Az elméletileg így megjósolt EM hullámokat Hertz kimutatta kísérletileg 1888-ban.

Monokromatikus síkhullám megoldás

Az előbbi homogén hullámegyenleteknek egyik lehetséges megoldásai a síkhullámok. Ha a **hullám forrásától elegendően messze** vagyunk akkor mindig tekinthetjük a hullámokat síkhullámoknak. Egy z irányba terjedő síkhullámra:

$$E_x = E_{x0} \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) \right] = E_{x0} \sin(\omega t - kz)$$

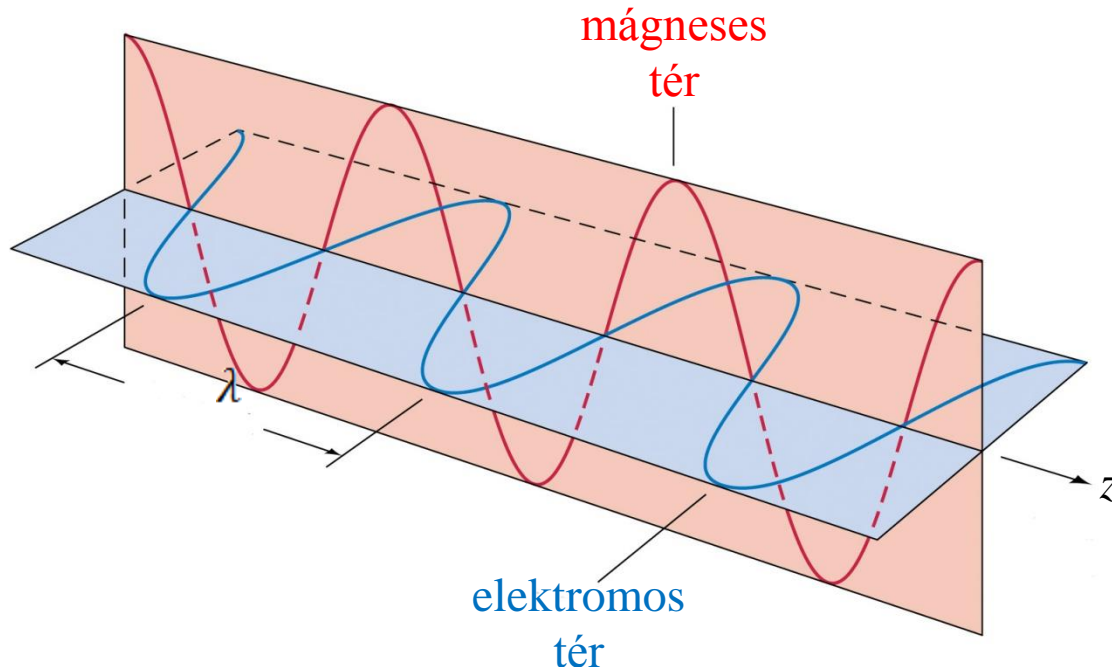
T : periódusidő λ : hullámhossz

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \text{körfrekvencia}$$

$$H_y = H_{y0} \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) \right] = H_{y0} \sin(\omega t - kz)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{körhullámszám}$$

Ez a megoldás monokromatikus mivel csak egyféle frekvenciát tartalmaz.



Az elektromágneses hullámban \vec{E} és \vec{H} merőleges, továbbá \vec{E} , \vec{H} , és \vec{v} jobbsodrású rendszert alkot (itt x , y , z). Az elektromágneses hullám **transzverzális**. Az elektromos és mágneses tér egymással azonos fázisban van.

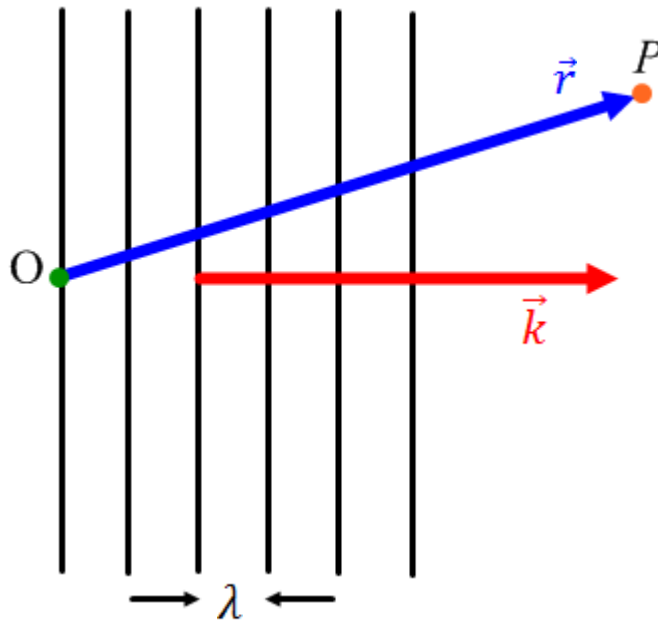
[Animáció kattintva!](#)

Tetszőleges irányba terjedő síkhullám

Általánosan a hullám terjedési irányát a körhullámszám vektor iránya jelöli ki (a sebesség iránya is ugyanaz). Az elektromos és mágneses térerősség a hely és idő függvényében:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$



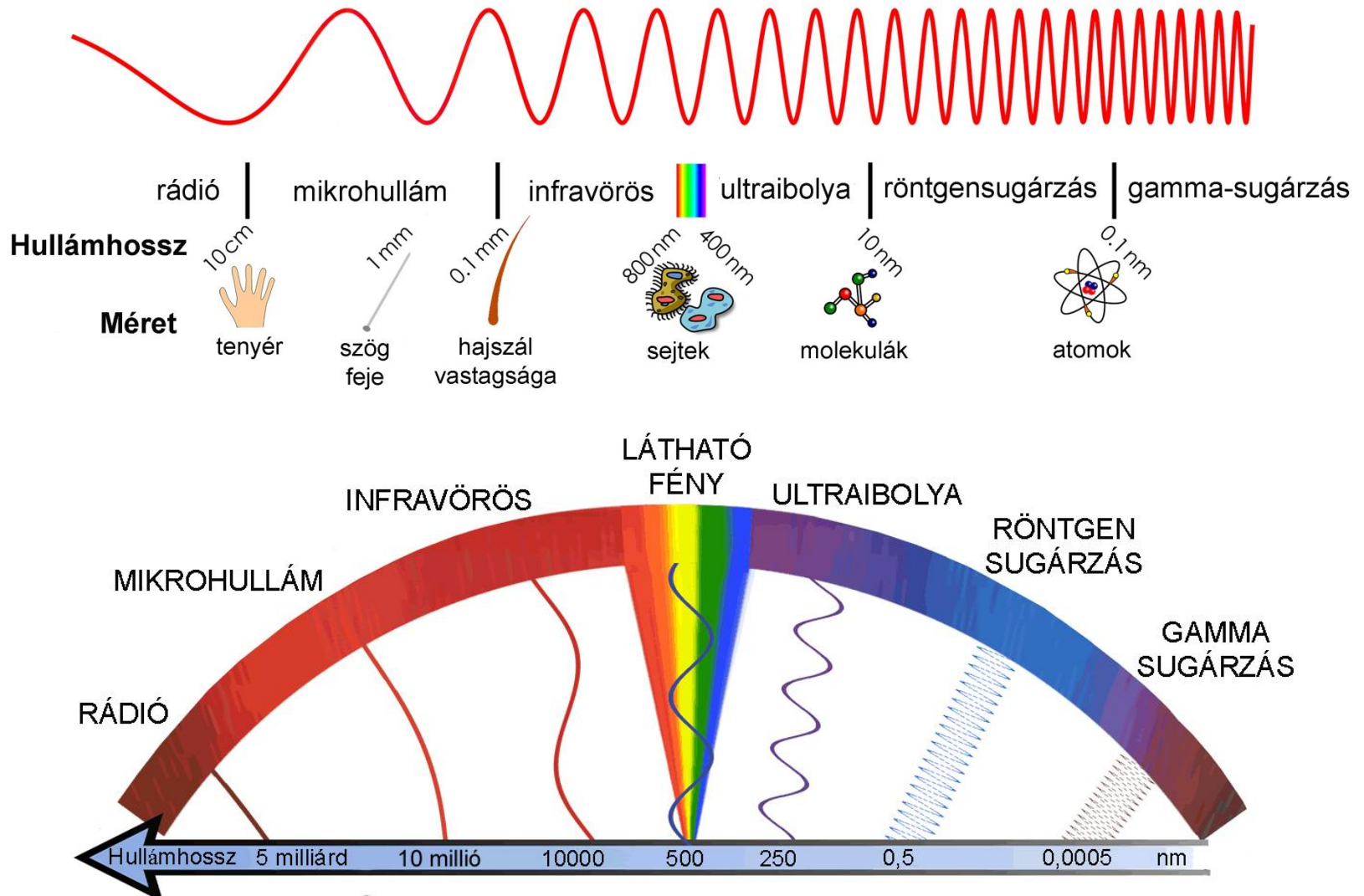
Térben az azonos fázisban lévő pontok halmaza egymást hullámhossznyi távolságonként követő síkok.

Általában az elektromágneses hullám sok különböző frekvenciájú hullámból tevődik össze. A különböző frekvenciák arányát mutatja az elektromágneses hullám spektruma (színképe).

Ha a hullámhossz nagyjából 400 és 800 nm között van, akkor a hullám a látható tartományba esik.

A teljes elektromágneses színekép

Az elektromágneses hullám hullámhossza (frekvenciája, vagy energiája) több nagyságrenden keresztül változhat. A látható tartomány (fény) ennek csak nagyon kis része:



Energiatétel elektromágneses térben

A Maxwell-egyenletek differenciális alakja: $\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Elsőt megszorozva $-\vec{E}$ -vel, másodikat \vec{H} -val és összeadva:

$$\vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{j}$$

Felhasználva: $\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H})$ $\vec{B} = \mu \vec{H}$ $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu H^2 + \frac{1}{2} \epsilon E^2 \right) - \vec{E} \cdot \vec{j}$$

Egy zárt felület által határolt térfogatra integrálva és a bal oldalra G-O tételt alkalmazva:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) dV = \int_V (\vec{E} \cdot \vec{j}) dV + \oint_F (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{A}$$

$$-\frac{\partial W_{EM}}{\partial t} = P_{Joule} + \oint_F \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

Az $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ vektor az energiaáram-sűrűség a felületen keresztül kifelé irányban. Tehát az EM tér energiája hővé alakul és kisugárzódik, és ezért csökken.

Energiaterjedés az elektromágneses hullámban

Az elektromágneses hullám terjedése során energia is áramlik. Az energiatervedés iránya ugyanaz mint a hullám iránya, és a pillanatnyi energia-áramsűrűséget egy pontban a **Poynting-vektor** adja meg:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad [\vec{S}] = \frac{\text{V A}}{\text{m m}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Egy tetszőleges felületen átáramló pillanatnyi teljesítmény tehát: $P(t) = \int_F \vec{S} \cdot d\vec{A}$

Az elektromágneses tér energiasűrűsége: $w_{EM} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2$

Az elektromos és mágneses tér fázisa megegyezik, és az általuk tárolt energia is:

$$\frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad \rightarrow \quad \text{a csúcserőkre: } \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2 = \frac{1}{2} \mu H_0^2 \quad \rightarrow \quad H_0^2 = \frac{\varepsilon}{\mu} E_0^2$$

Tehát a Poynting-vektor kifejezhető csak az egyik térerősséggel:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} = EH\vec{e} = \vec{e}E_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) H_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \\ &= \vec{e}E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 \sin^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \vec{e} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \sin^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \end{aligned}$$

a hullám terjedési
 \vec{e} irányába mutató
egységvektor

16. feladat

Emellett írható még:
$$\vec{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2 \vec{e} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon \mu}} \varepsilon E^2 \vec{e} = v \varepsilon E^2 \vec{e} = v w_{EM} \vec{e} = w_{EM} \vec{v}$$

Koherens hullámok interferenciája

Az energia-áramsűrűség nagyságának időátlagát a hullám intenzitásának nevezzük:

$$I = \langle S \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle E^2 \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{T} \int_0^T E_0^2 \sin^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) dt = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_0^2}{2}$$

Ha két egyenlő frekvenciájú, egymásra nem merőleges síkokban rezgő hullám a tér egy részében úgy találkozik, hogy a fázisuk közötti különbség huzamosabb ideig állandó akkor abban a térrészben állóhullám jön létre.

Az ilyen hullámokat **koherens** hullámoknak nevezzük, a megfigyelhető jelenség pedig az **interferencia**.

Legyen a két hullám: $\vec{E}_1 = \vec{E}_{10} \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})$ $\vec{E}_2 = \vec{E}_{20} \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \delta)$

Az eredő térerősség minden pontban és időben a két térerősség vektori összege:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_{10} \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}) + \vec{E}_{20} \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \delta)$$

Az eredő térerősség négyzete: $E^2 = \vec{E}^2 = \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$

[Animáció kattintva!](#)

Az interferencia tag

A két koherens hullám által létrehozott intenzitás:

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle E^2 \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle E_1^2 \rangle + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle E_2^2 \rangle + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_{10}^2}{2}}_{I_1} + \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_{20}^2}{2}}_{I_2} + \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle}_{I_{12}}$$

Az interferencia tag:

$$I_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle 2\vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}) \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \delta) \rangle \begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{cases} +$$

$$I_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} [\cos(2\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \delta) + \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \delta)] \rangle$$

Az első tag időátlaga 0, másodiké önmaga, hisz az időtől független:

$$I_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cos[(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} - \delta] = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cos[\Delta\varphi] \quad \Delta\varphi: \text{fáziskülönbség}$$

Speciális eset: $\vec{E}_{10} = \vec{E}_{20} = \vec{E}_0$ tehát $I_1 = I_2 = I$ konstruktív és destruktív interferencia:

$$I_k = I + I + 2I = 4I \quad (\Delta\varphi = 0)$$

$$I_d = I + I - 2I = 0 \quad (\Delta\varphi = \pi)$$

Hullám viselkedése két közeg határfelületén

Különböző közeghez érve a hullám egy része mindig visszaverődik (ugyanolyan szögben), a másik része pedig megtörve behatol a másik közegbe. Bizonyos esetekben a hullám teljes mértékben visszaverődik.

A beesési és a törési szögekre érvényes a Snellius-Descartes törvény:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

n_1 és n_2 az 1-es és 2-es közeg abszolút törésmutatója (vákuumra vonatkoztatott), míg n_{21} a 2-es közeg 1-esre vonatkoztatott törésmutatója.

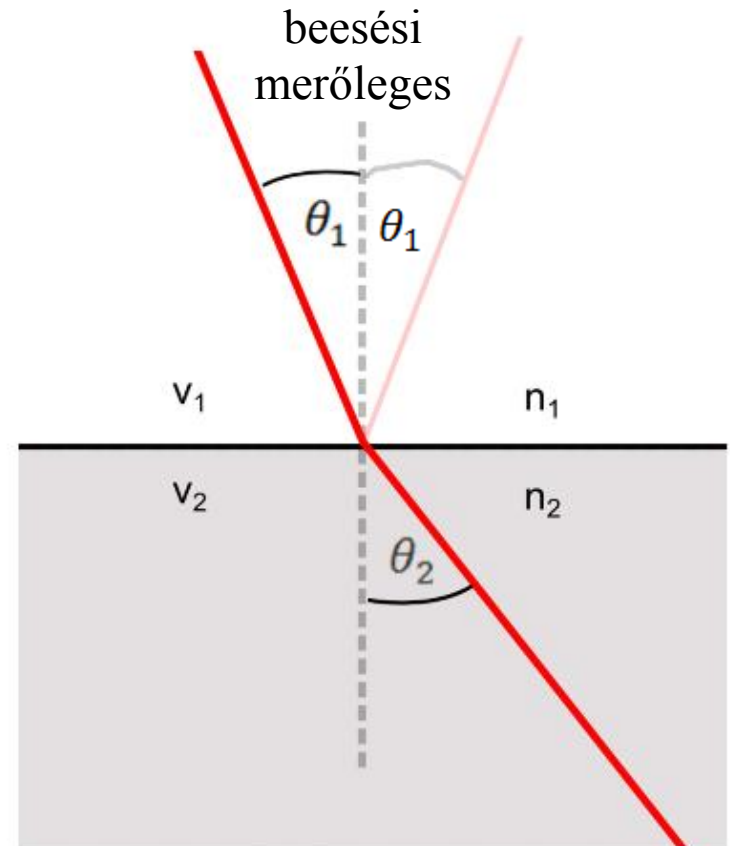
A törésmutató a közegekben mért fénysebességek hányadosának reciprokja:

$$n_1 = \frac{c}{v_1}$$

A teljes visszaverődés határszöge:

$$\sin\theta_2 = \sin 90^\circ = 1 \rightarrow \sin\theta_{1h} = n_{21}$$

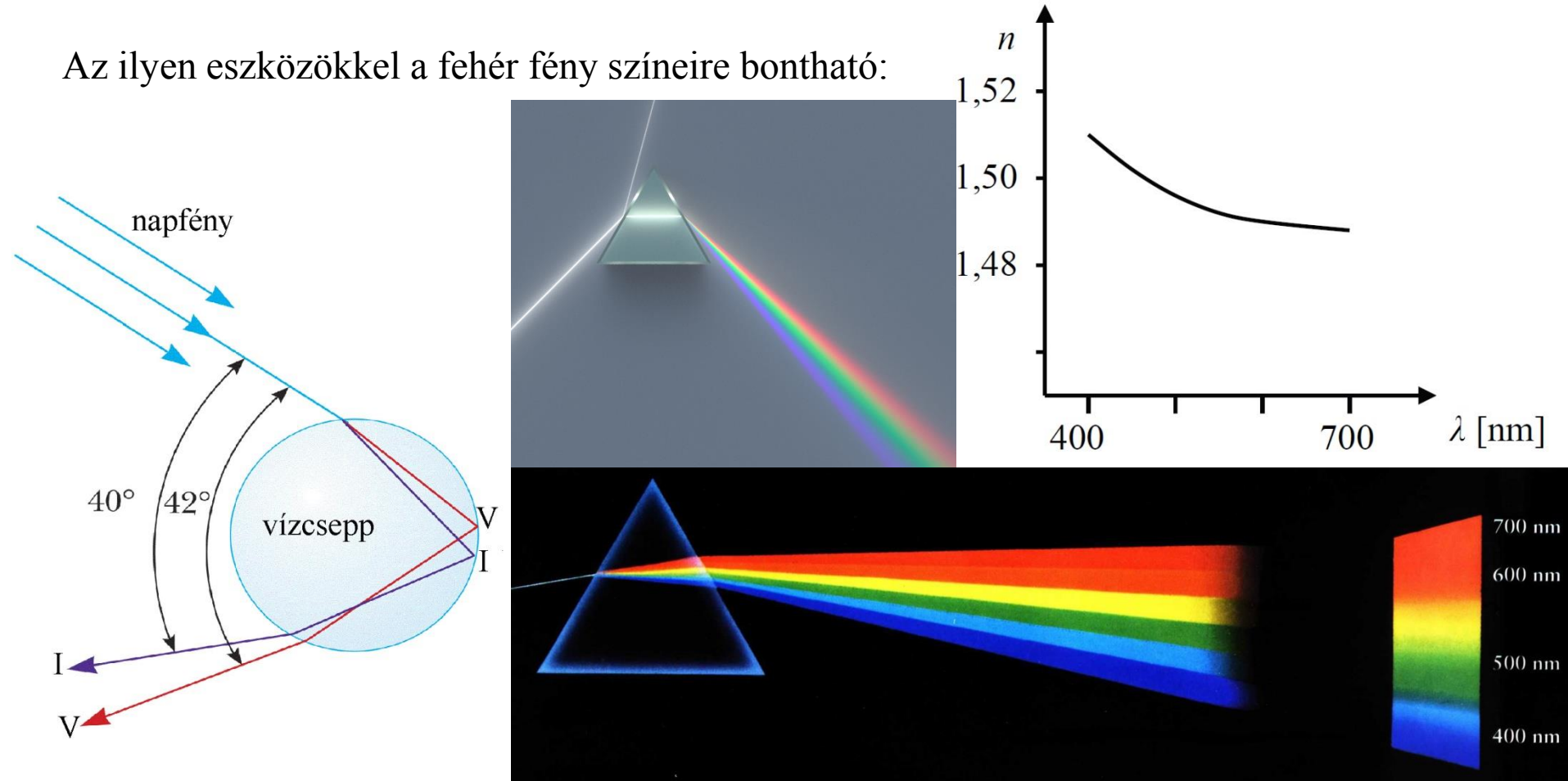
Csak akkor lehetséges ha $n_{21} < 1$, vagyis $n_2 < n_1$ (sűrűbb közegből ritkább felé haladva)



Diszperzió

Egy közeg törésmutatója általában függ a rajta áthaladó fény hullámhosszától. Emiatt a különböző színű fénysugarak különböző mértékben törnek meg.

Az ilyen eszközökkel a fehér fény színeire bontható:



Vékonyréteg-interferencia

Konstruktív interferencia: $\Delta\varphi = m \cdot 2\pi$ ($m = 0, 1, \dots$)

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (n_3 > n_2 > n_1)$$

$$\varphi_1 = k_1 \overline{AD} + \pi \quad *$$

$$\varphi_2 = k_2 (\overline{AB} + \overline{BC}) + \pi \quad *$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_2} (\overline{AB} + \overline{BC}) - \frac{2\pi}{\lambda_1} \overline{AC} \sin \theta_1$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi n_2}{\lambda_1 n_1} \left(\frac{2d}{\cos \theta_2} \right) - \frac{2\pi}{\lambda_1} \overline{AC} \sin \theta_1$$

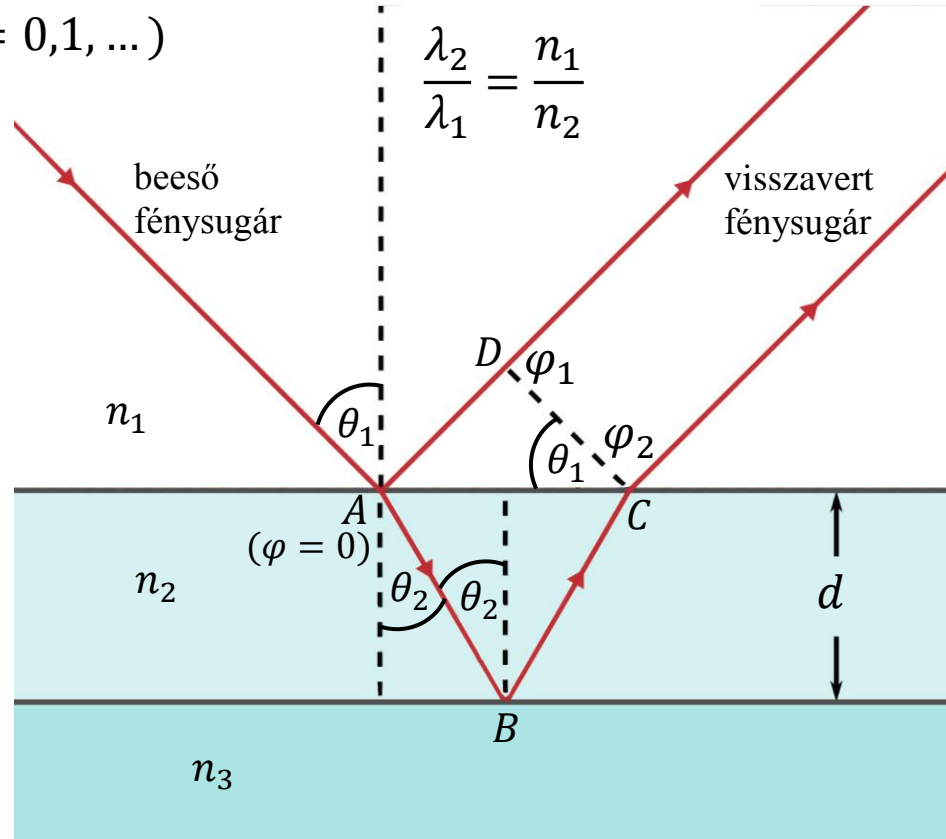
Közelítőleg merőleges beesésnél:

$$\cos \theta_2 \approx 1 \quad \sin \theta_1 \approx 0$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi n_2}{\lambda_1 n_1} \cdot 2d = m \cdot 2\pi$$

$$\frac{n_2}{\lambda_1 n_1} \cdot 2d = m$$

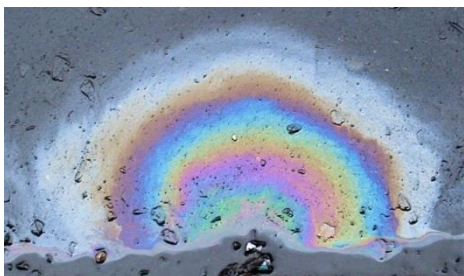
$$\frac{n_2}{n_1} \cdot 2d = m \lambda_1$$



Ha az 1-es közeg levegő: $n_1 \approx 1$, $\lambda_1 \approx \lambda$, $n_2 = n$

$$n \cdot 2d = m \lambda \quad (\text{optikai úthossz: } s_0 = n \cdot l)$$

* Amikor a hullám optikailag **sűrűbb** közegről verődik vissza, akkor π fázisugrást szenved! Ha csak az egyiknél sűrűbb, akkor ez pont a gyengítés feltétele lenne!



Optikai rács

Konstruktív interferencia: $\Delta\varphi = m \cdot 2\pi$ ($m = 0, 1, \dots$)

Pozíció az ernyőn:

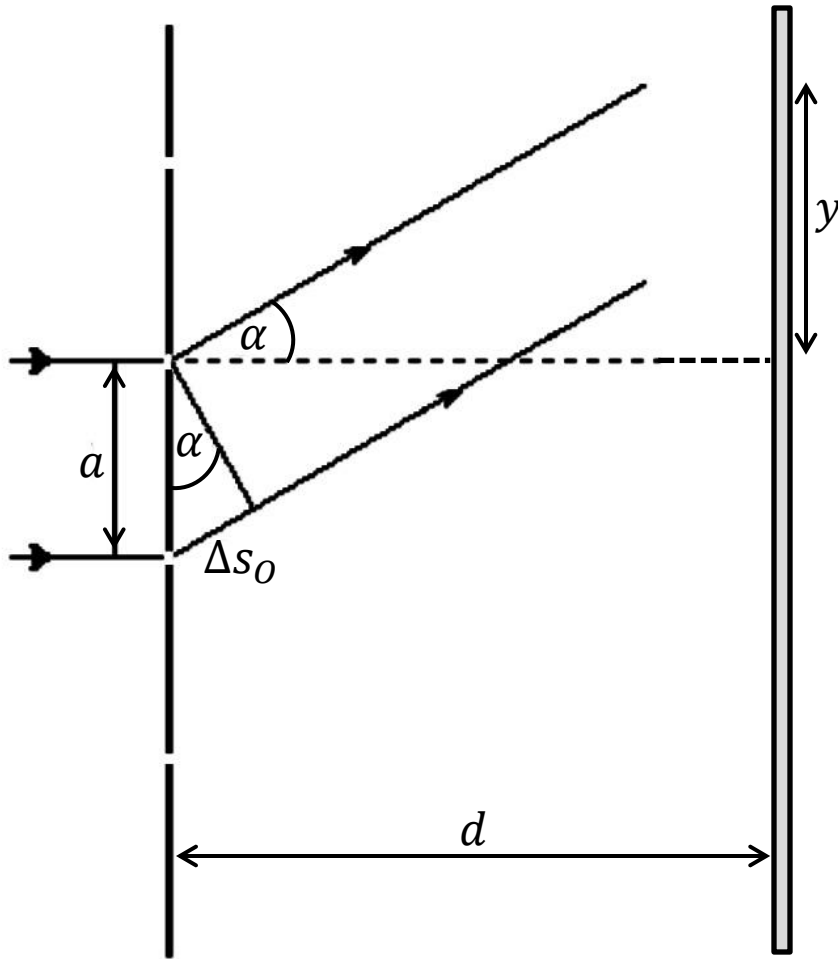
Optikai úthosszak különbségére: $\Delta s_0 = m\lambda$

$$\rightarrow a \sin \alpha = m\lambda$$

$$\sin \alpha = \frac{m\lambda}{a}$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{d}$$

$$y = d \operatorname{tg} \alpha$$



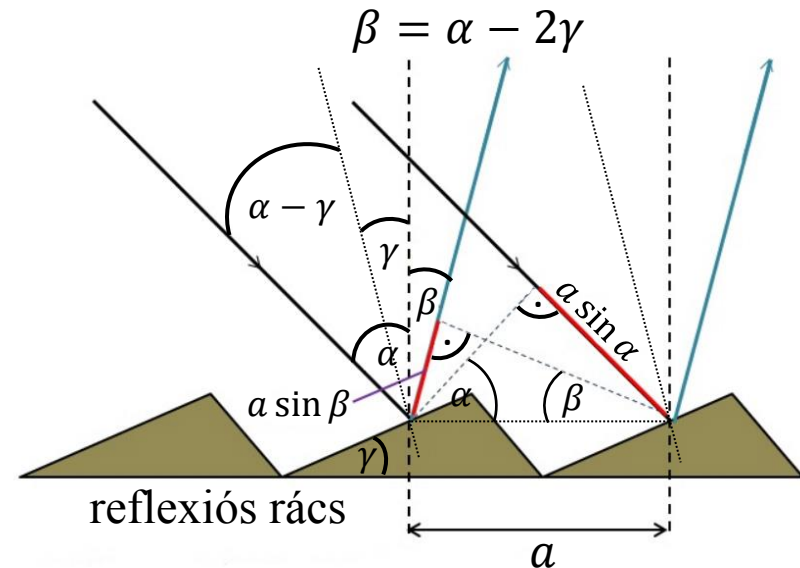
transzmissziós rács

ernyő

Reflexiós rácsnál:

$$\Delta s_0 = a \sin \alpha - a \sin \beta = m\lambda$$

$$a(\sin \alpha - \sin \beta) = m\lambda$$



reflexiós rács

a

A modern fizika születése

Lord Kelvin a 19. század végén azt mondta, hogy a fizika egy befejezett tudomány:

„Nincsen olyan probléma amit a tudomány ne tudna megoldani. A fizika egy befejezett tudomány, elméleteink olyan jól működnek, hogy biztosan helyesek. Talán két picike felhő van a tiszta kék égen.”

Ezek a felhőcskék (fény terjedése és a hőmérsékleti sugárzás) azonban alapjaiban rengették meg a fizikát és két új elmélet megalkotásához vezettek:

- Relativitáselmélet (speciális és általános)
- Kvantum fizika

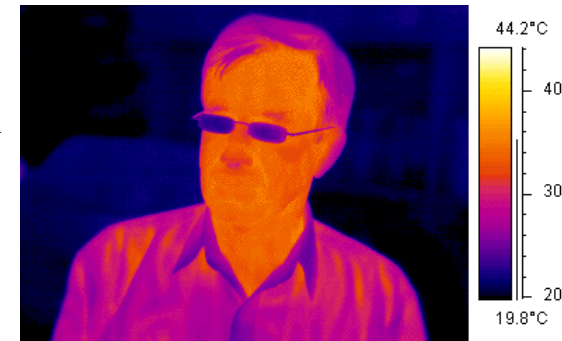
Ezáltal a 20. század eleje egyben a modern fizika kezdetét is jelentette.

A hőmérsékleti sugárzás

Felhevített tárgyak több száz fokos hőmérsékletet elérve először vörösen, majd még magasabb hőmérsékleten sárgán izzanak, tehát fényt (elektromágneses hullámokat a látható tartományban) bocsátanak ki.



Bár csak a nagyon forró testek sugárzását láthatjuk saját szemünkkel, műszerek segítségével az alacsonyabb hőmérsékletű testek sugárzását is megmérhetjük. Minden test, aminek a hőmérséklete nem abszolút nulla, sugároz.



A hőmérsékleti sugárzást feketetest sugárzásnak is nevezik.

Ideális fekete test: amely a ráeső sugárzást teljesen elnyeli, és a kibocsátott sugárzása csak a hőmérséklettől függ. Ez bármely anyagból készült üreges testel és azon egy kicsiny lyukkal valósítható meg, mert a lyukra igaz, hogy

- a ráeső sugárzás a lyukon mind bemegy az üregbe
- az üreg belső faláról visszavert fény nagy valószínűséggel belül marad és elnyelődik
- belül az elektromágneses sugárzás és az anyag között termodinamikai egyensúly áll be
- a sugárzás spektruma ekkor csak az anyag hőmérsékletétől függ.

A hőmérsékleti sugárzás spektruma

Maxwell egyenleteiből klasszikus elgondolással nem sikerült levezetni a hőmérsékleti sugárzást leíró egyenletet (kis frekvenciákra és nagyfrekvenciákra voltak közelítő képletek, de ezek a teljes tartományra végtelent adtak a kisugárzott teljesítményre).

Végül **Max Planck** sikerrel járt, de csak úgy, hogy feltételezte, hogy az elektromágneses energia nem lehet folytonos, hanem csomagokban van jelen (fotonok), melyek energiája f frekvenciájú sugárzás esetén:

$$E = hf \quad \text{ahol } h \text{ a Planck konstans: } h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

Ez egyre jobban feltűnő amikor a frekvencia nagy és a csomagok (kvantumok) energiája nagy, például gamma sugárzás esetén. Ez az eredmény jelentette a **kvantum fizika** kezdetét. Az emisszió-képesség hullámhosszfüggése (spektrum):

Nagyobb hőmérsékleten a görbe maximuma alacsonyabb hullámhossz felé tolódik: **Wien-féle eltolódási törvény:**

$$\lambda_{max} \cdot T = \text{állandó}$$

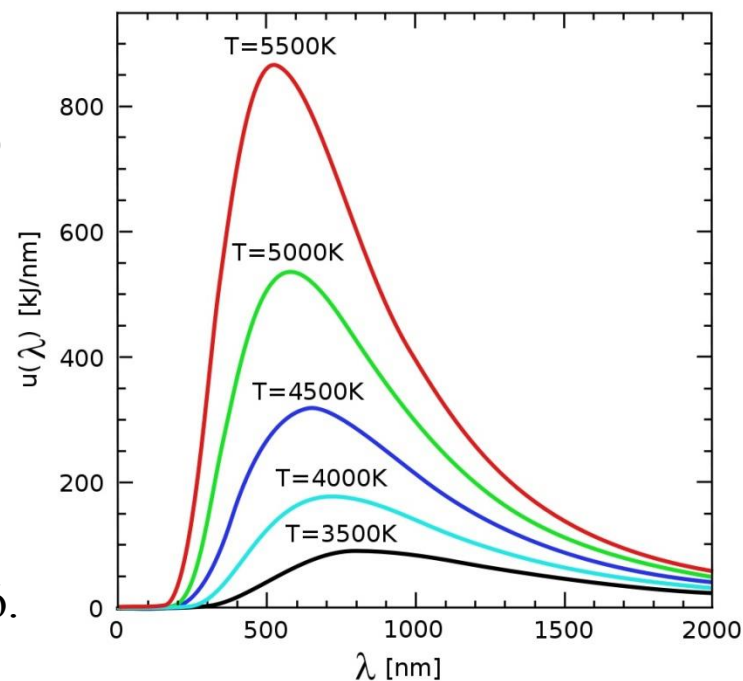
A Wien-féle állandó értéke $2,9 \cdot 10^{-3} \text{ Km}$.

A teljes kisugárzott teljesítményt (görbe alatti területet, vagyis az integrált) a hőmérséklet függvényében a

Stefan-Boltzmann törvény adja meg:

$$P = \sigma \cdot T^4 \cdot A$$

ahol $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ a Stefan-Boltzmann állandó.



Fényelektromos hatás (fotoeffektus)

Ultraibolya fény hatására egy cinklemezről elektronok hagynak el.

A jelenséget a fény hullámtermészetével magyarázva azt várjuk, hogy az elektronok kilépése csak a hullám intenzitásától függ.

Kísérleti tapasztalat:

- Ha a megvilágító fény frekvenciája nem ér el egy f_0 (határfrekvencia) értéket akkor elektronkilépés nincs, bármekkora is az intenzitás (f_0 az anyagi minőségtől függ).
- Ha van kilépés, akkor a kilépő elektronok sebessége a fény frekvenciájától függ.
- A kilépő elektronok száma arányos a fény intenzitásával, állandó $f > f_0$ mellett.
- Az elektronok kilépése szinte azonnal megindul a megvilágítás kezdetétől mérve.

Ezek a tapasztalatok a fény hullámtermészetével nem magyarázhatók.

Einstein (1905): A fény részecskéként viselkedik, részecskéi a fotonok, melyek energiája $E = hf$. Ez az energia csak egy elektronnak adódik mind oda, amellyel a foton kölcsönhatásba lép. Nem oszlik szét a környező elektronok közt.

Einstein fotoelektromos egyenlete (Nobel-díjat kapott miatta): $hf = W_{ki} + \frac{1}{2} m_e v^2$

W_{ki} : fémre jellemző kilépési munka (egy e^- kiszabadításához szükséges energia).

m_e : elektron tömege

Határfrekvencia:

A foton összes energiája a kilökésre fordítódik, nem marad fel kinetikus energia: $hf_0 = W_{ki}$

A foton lendülete

Az Einstein-féle tömeg-energia ekvivalencia alapján: $E = mc^2$.

A foton energiája: $E = hf$

Tehát a fotonhoz rendelhetünk egy tömeget (nem a nyugalmi tömeg, mert az nincs neki!):

$$m_f = \frac{E_f}{c^2} = \frac{hf}{c^2} = \frac{h}{\lambda c}$$

Ezt a foton c sebességével megszorozva kapjuk a **foton lendületét**: $p_f = m_f c = \frac{h}{\lambda c} c = \frac{h}{\lambda}$

Ez a mennyiség a fontos akkor, amikor a foton részecskéken szóródik (Compton-szórás), illetve emiatt a **foton nyomást fejt ki** a felültre, ami őt elnyeli vagy visszaveri.

A fény nyomását használva vitorlázhatunk az űrben.

