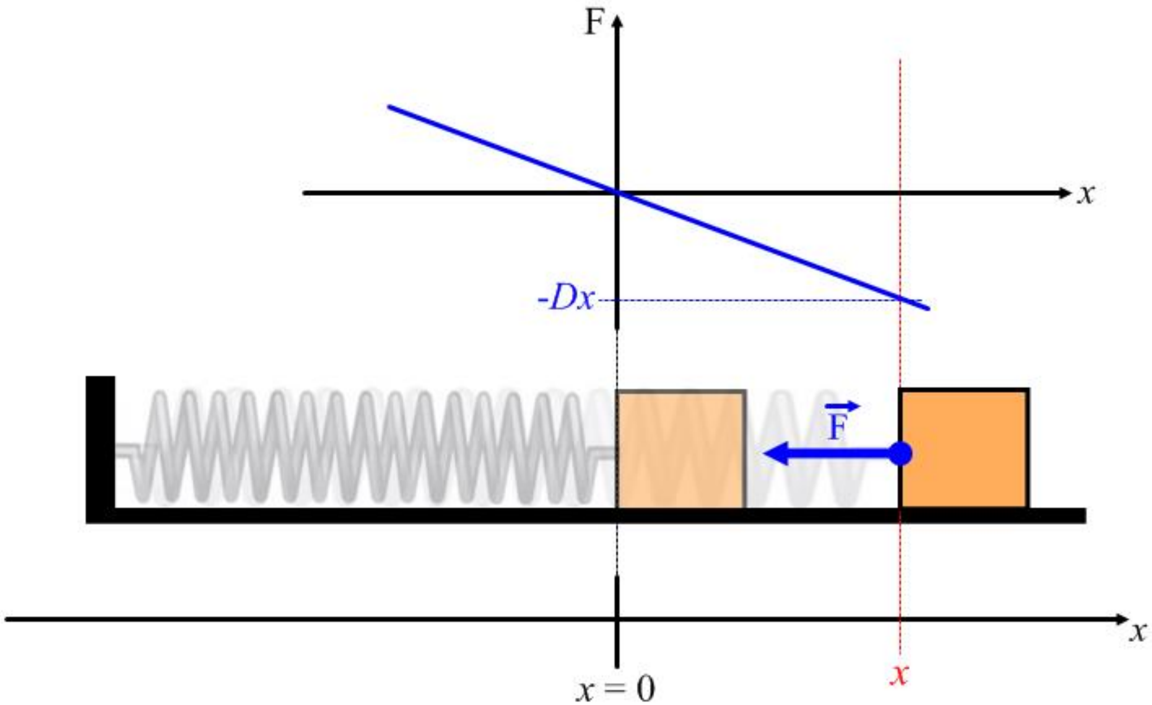
Rezgések

Harmonikus rezgőmozgás mozgásegyenlete

Harmónikus rezgés: Feltétele, hogy a testre ható erő harmonikus legyen: $F_x = -Dx$ (Hooke-törvény). Tehát pl. egy rúgóra akasztott test (ha minden más erő elhanyagolható).



Felírva a mozgásegyenletet:

$$ma_x = -Dx$$
$$m\ddot{x} = -Dx$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{D}{m}x$$

Általános megoldás (mozgástörvény):

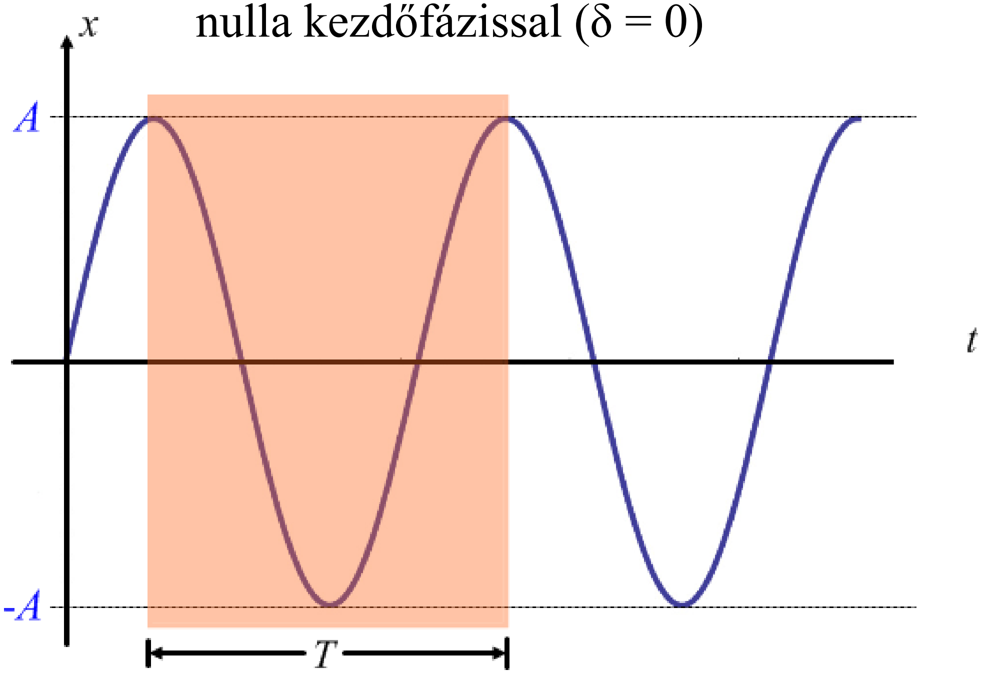
$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$$

kezdeti feltételek határozzák meg őket $\left\{ \begin{array}{l} \text{A: amplitúdó (maximális kitérés)} \\ \delta\text{: kezdőfázis} \end{array} \right.$

ω: körfrekvencia (lásd később)

Harmonikus rezgőmozgás mozgástörvénye

Szinuszos harmonikus rezgőmozgás,
nulla kezdőfázissal (δ = 0)



$$x(t) = x(t+T)$$

$$\omega(t+T) = \omega t + 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$ körfrekvencia

$$\omega = 2\pi f$$

A kitérés-idő függvény:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$$

Ezt deriválva kapjuk a sebességet:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \delta)$$

A sebesség deriváltja pedig a gyorsulás:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \delta)$$

Felhasználhatjuk: $x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$

Tehát a gyorsulásra: $a_x(t) = -\omega^2 x$

Mozgásegyenletben volt: $a_x = -\dfrac{D}{m}x$

Tehát: $\omega^2 = \dfrac{D}{m}$

Kinetikus és potenciális energia

Kinetikus energia: A sebesség-idő függvényt felhasználva (δ = 0)

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t)$$

Potenciális energia: A kitérés-idő függvényt felhasználva (δ = 0) – rugalmas erőtér

$$E_P = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t)$$

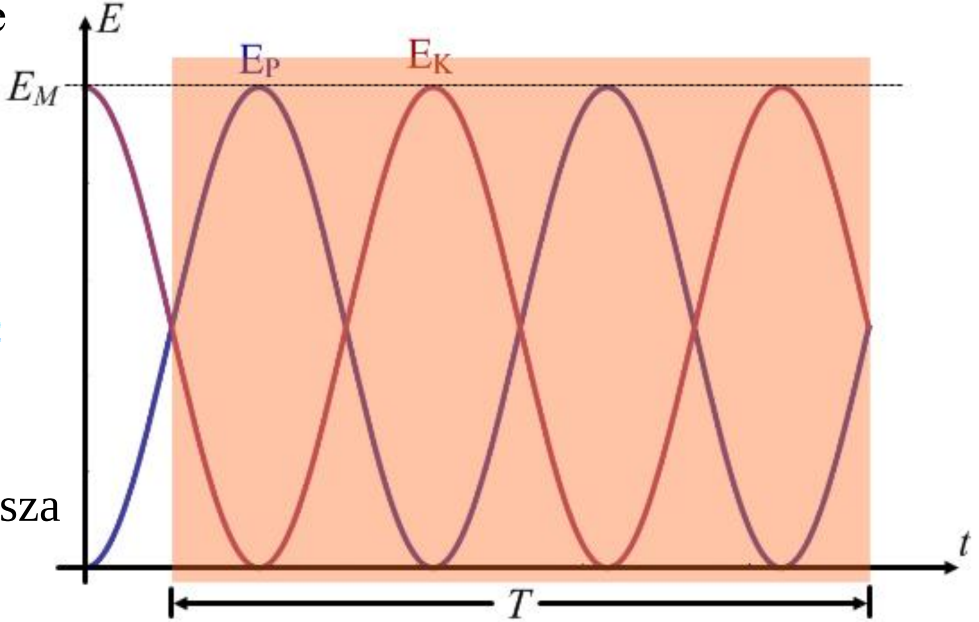
Mechanikai energia:

A potenciális és a kinetikus energia összege

$$E_M = E_K + E_P$$

$$= \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t)$$

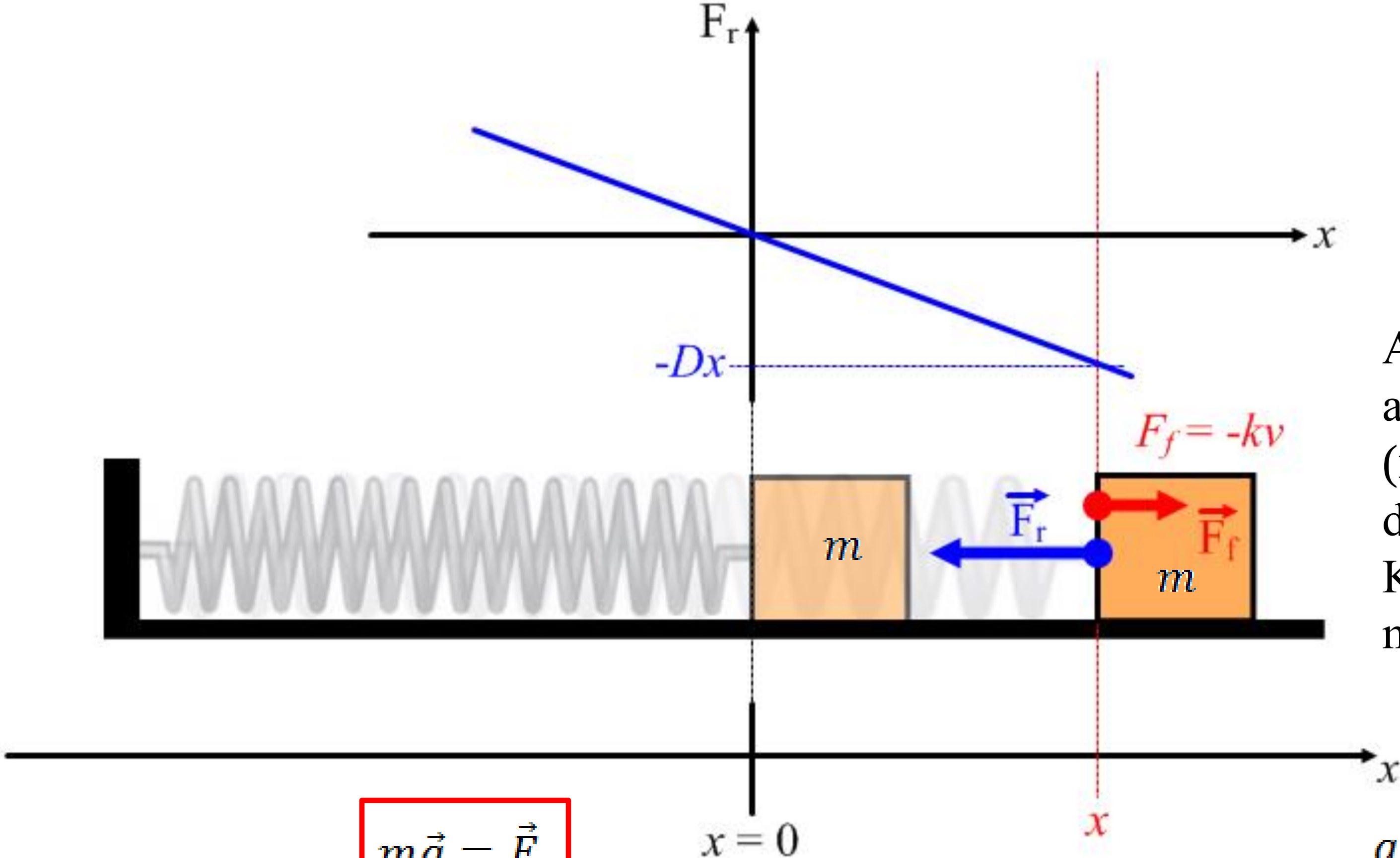
$$= \frac{1}{2}DA^2[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)] = \frac{1}{2}DA^2$$



A potenciális és a kinetikus energia oda-vissza egymásba alakul a mozgás során.

Csillapított rezgés

Csillapított rezgés: A valóságban a rezgések lassan vagy gyorsan, de csillapodnak.
A rugalmas erőn kívül, még egy sebességgel arányos fékező erőt figyelembe véve:



A fékező erő miatt a mozgás energiája (mechanikai energia) disszipálódik. Kváziperiodikus mozgás jön létre.

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}_e}$$

$a = \ddot{x}$ $\qquad v = \dot{x}$

A mozgásegyenlet (egyenes vonalú mozgás *x* mentén): $m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$

Csillapított rezgés mozgástörvénye

Kiindulva a mozgásegyenletből : $m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$

$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0$ $\quad \frac{D}{m} = \omega_0{}^2$ $\quad \omega_0$ - a csillapítatlan rezgés körfrekvenciája (lenne!)

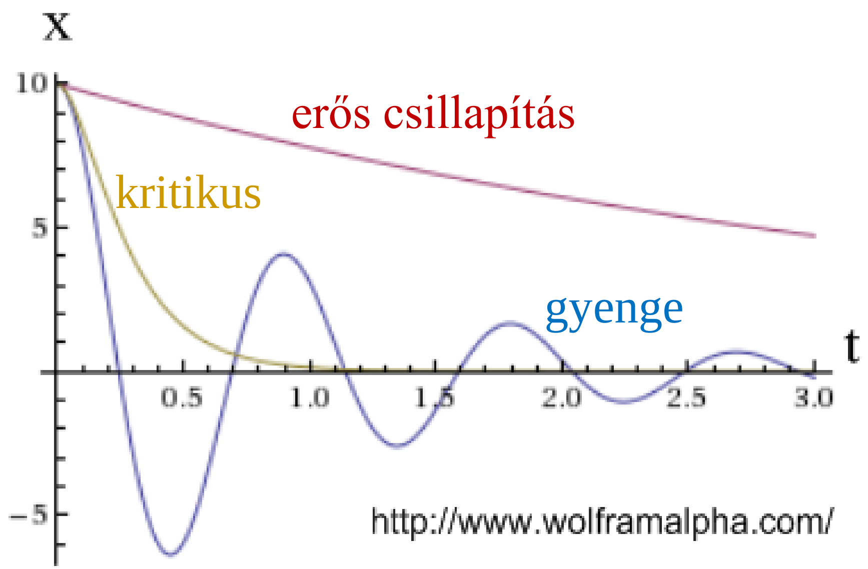
$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0{}^2 x = 0$ $\quad \alpha = \frac{k}{2m}$ $\quad \alpha$ - a csillapítási tényező

Homogén, lineáris, másodrendű differenciálegyenlet. Megoldás exponenciális: $x = e^{\lambda t}$

Behelyettesítve: $\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\alpha\lambda e^{\lambda t} + \omega_0{}^2 e^{\lambda t} = 0 \quad \text{és} \quad e^{\lambda t} \neq 0$

Egyszerűsítve kapjuk a karakterisztikus egyenletet: $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0{}^2 = 0$

Megoldásai: $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0{}^2}$



Három lehetséges eset

1. gyenge csillapítás: $\alpha^2 - \omega_0{}^2 < 0$

2. kritikus csillapítás: $\alpha^2 - \omega_0{}^2 = 0$

3. erős csillapítás: $\alpha^2 - \omega_0{}^2 > 0$

Gyengén csillapított rezgés

$$\alpha^2 - \omega_0{}^2 < 0$$

A negatív diszkriminánst átalakítva:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0{}^2} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0{}^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\omega$$

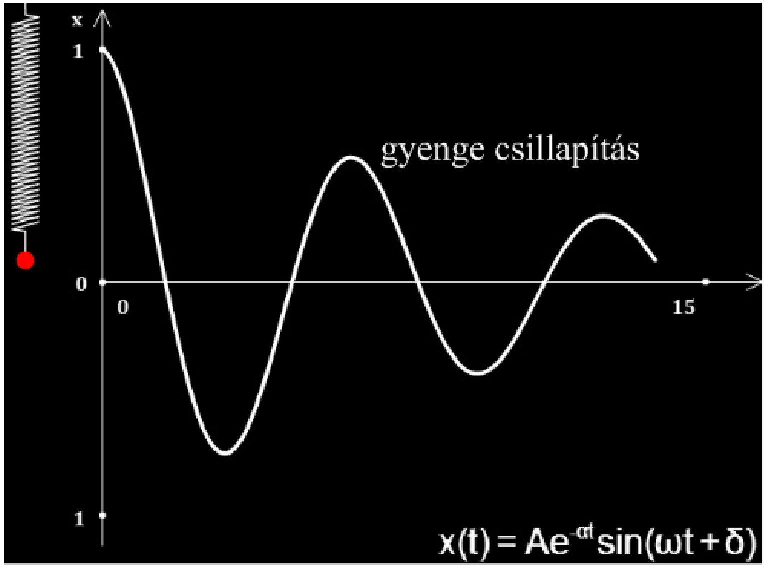
A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$x(t) = Ce^{-\alpha t}\sin(\omega t + \delta)$$

Ezt deriválva kapjuk a sebesség általános alakját:

$$v(t) = -\alpha Ce^{-\alpha t}\sin(\omega t + \delta) + \omega Ce^{-\alpha t}\cos(\omega t + \delta)$$

A ***C*** és **δ** konstansokat a **határfeltételekből** lehet meghatározni.
Pl. $x(0)$ és $v(0)$ megadható, és
a két egyenletet megoldva
a konstansok kiszámolhatók.



ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!

Kényszerrezgés

Egy periodikus erő pótolja a disszipált energiát:

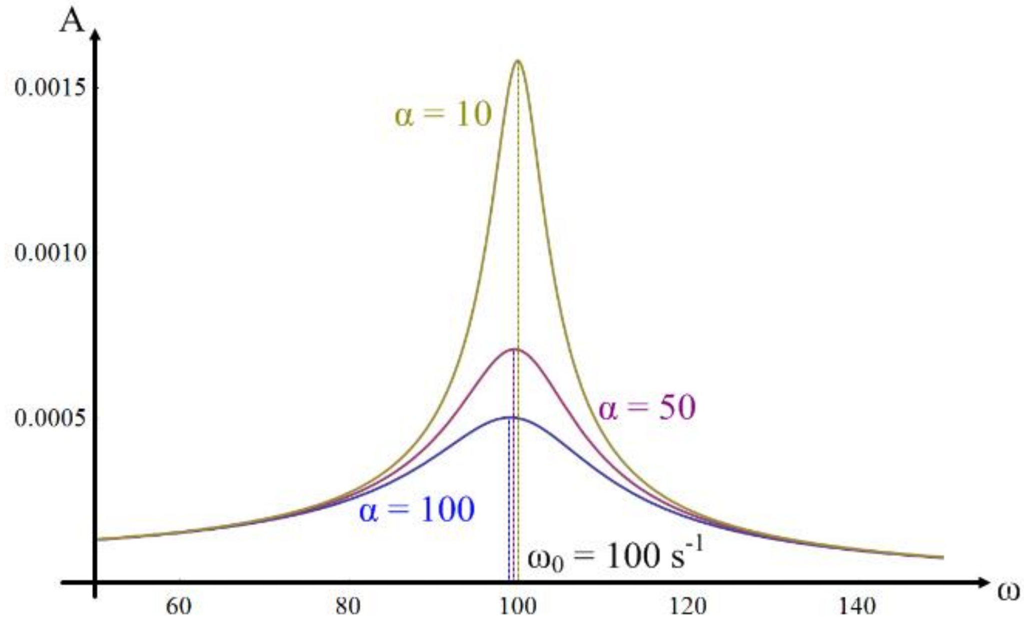
$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} + F_0 \sin(\omega t)$$

Megoldás: egy időben lecsengő (előzőhöz hasonlóan) rezgés, és egy állandósuló rezgés a gerjesztő frekvencián.
Tehát hosszabb idő múlva a mozgástörvény:

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \sin(\omega t - \delta) \qquad \frac{D}{m} = \omega_0{}^2$$

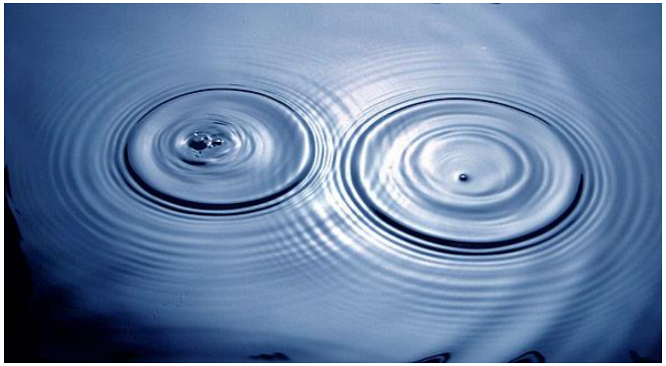
ω_0 - sajátfrekvencia
δ - fáziskésés

<u>Rezonancia</u>: Az az ω_r körfrekvencia, amire a rezgés amplitúdója a lehető legnagyobb.
Ha a csillapítás gyenge (α kicsi), akkor $\omega_r \approx \omega_0$ és az amplitúdó minden határon túl nőhet (amíg a rendszer szét nem esik…) – rezonancia katasztrófa.



Hullámok

Hullámok akkor jönnek létre amikor egy rugalmas közegben a közeg egy részének rezgése tovaterjed a közegben, azáltal, hogy a szomszédos pontok is átveszik a rezgést.
Pl. gitárhúr (1D), víz felülete (2D), hang vagy fény (3D)



A tovaterjedés sebessége a hullám **fázissebessége** (c).
Ez határozza meg milyen időkésés van a két távoli pont rezgése között.
Tekintsünk egy x irányban terjedő síkhullámot (vagy egy 1 dimenziós húron terjedő hullámot).
A rezgés az $x = 0$ helyen a szokásos harmonikus függvény: $y(t) = A\sin(\omega t)$
Ehhez képest az x helyen a rezgés x/c idővel késik:

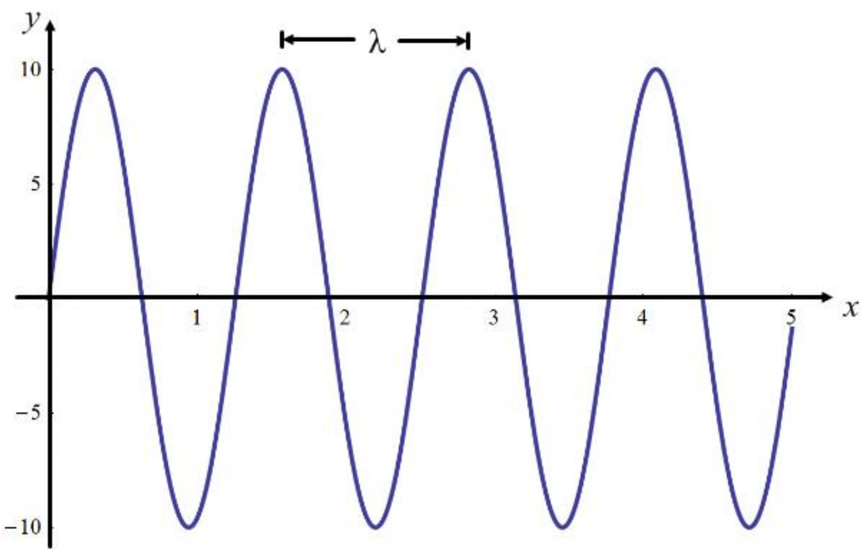
$$y(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] = A\sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right)$$

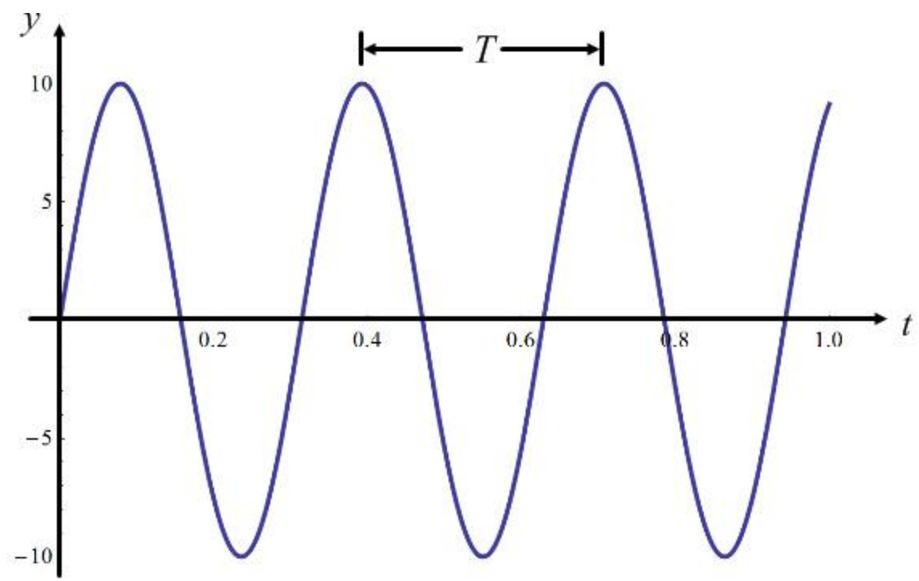
$$= A\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{Tc}\right) = A\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = A\sin(\omega t - kx)$$

T: a rezgés **periódusideje** ω: a rezgés **körfrekvenciája** $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$
λ: a **hullámhossz** (periódusidő alatt megtett út) $\lambda = Tc$
k: **körhullámszám** $k = 2\pi/\lambda$ Mivel: $T = 1/f$ ezért $\boxed{c = \lambda f}$

Hullámok: hely és időfüggés

A hullám esetében a hely és időfüggés is periodikus függvény: $y(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$

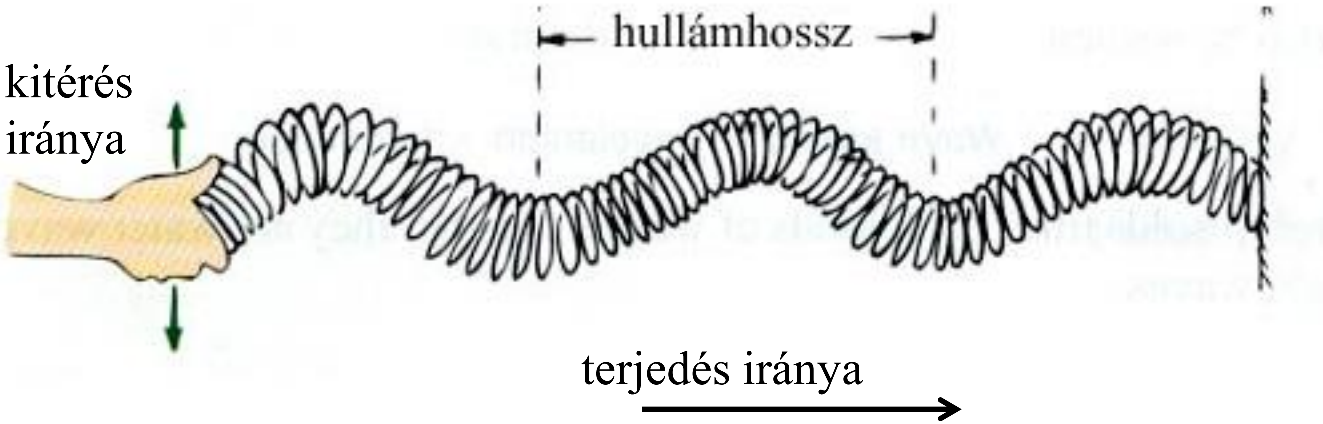




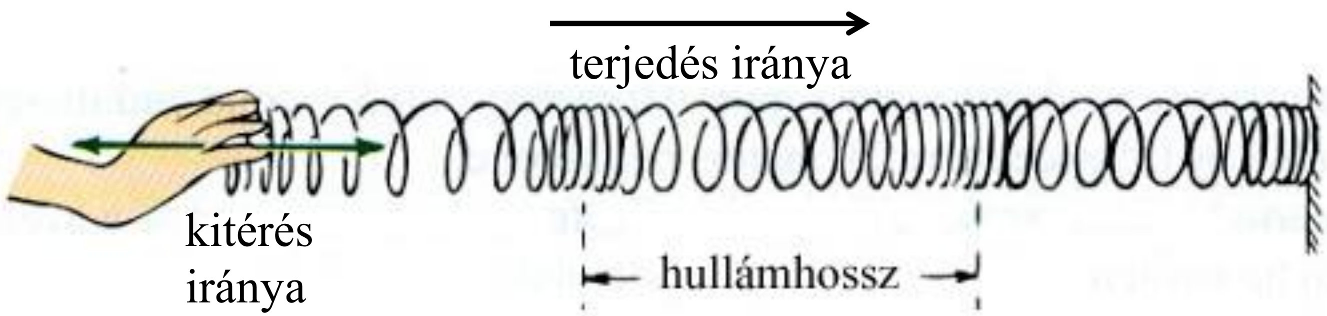
A térbeli periodicitás a hullámhossz
(adott időbeli pillanatkép)

Az időbeli periodicitás a periódusidő
(adott helyen vizsgált rezgés időfüggése)

Transzverzális és longitudinális hullámok

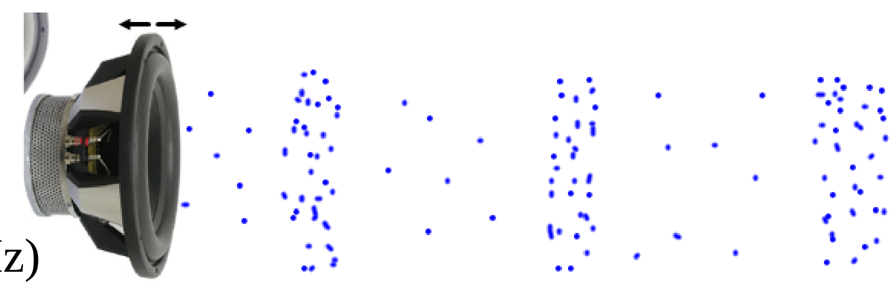


transzverzális hullám:
a kitérés merőleges
a terjedési irányra



longitudinális hullám:
a kitérés párhuzamos
a terjedési iránnyal

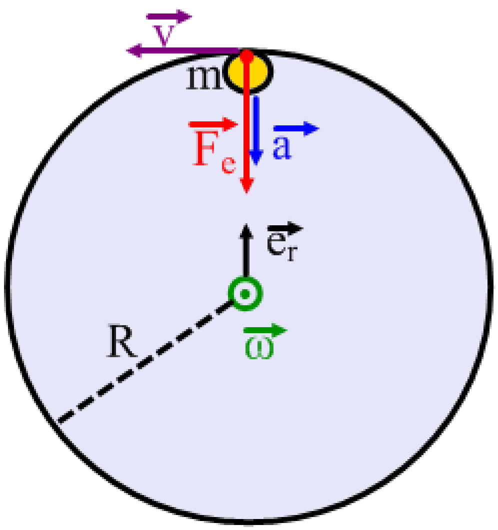
a hang is
longitudinális
hullám
(20Hz – 20kHz)



Körmozgás és forgómozgás

Egyenletes körmozgás dinamikája

<u>Egyenletes körmozgás:</u> A mozgás során a sebesség nagysága állandó, iránya viszont folyamatosan változik. Tehát van gyorsulás, ami a középpont felé mutat (**centripetális**). Ennek feltétele, hogy az eredő erő is abba az irányba mutasson (centripetális erő).



INERCIARENDSZERBEN TÁRGYALJUK

A dinamika alapegyenlete: $m\vec{a} = \vec{F}_e$

Gyorsulásnak csak centripetális (sugár irányú) komponense van.

Az eredő erő nagysága:

$$F_e = ma = ma_{cp} = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$$

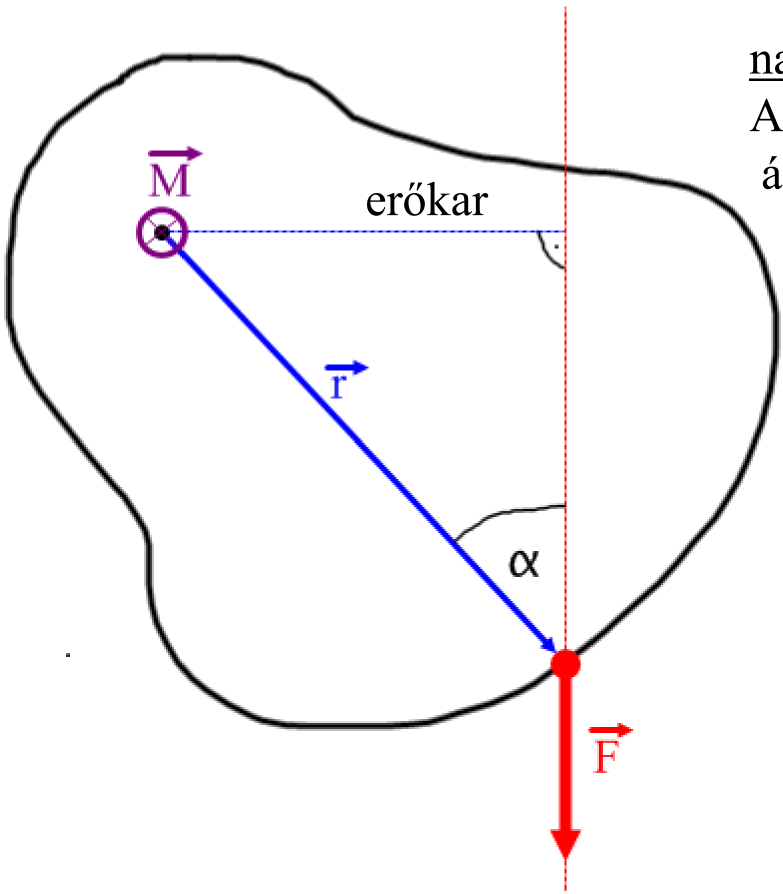
Ezt az eredő erőt sokféle kölcsönhatás biztosíthatja: lehet pl. gravitációs erő, Coulomb-erő, kötélerő, nyomóerő, Lorentz-erő, stb. stb.
Ekkor $\vec{F}_e \perp \vec{v}$, tehát a **munkavégzés nulla**. A centripetális erő nem végez munkát.

A szögsebesség-vektor iránya a jobbkéz-szabállyal határozható meg. Az ábrán pl. kifelé.

Változó körmozgás - forgatónyomaték

Egy erő origóra (forgástengely) vonatkoztatott **forgatónyomatéka**: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Erőkar: az erő hatásvonalának a forgástengelytől mért távolsága



<u>nagysága:</u> erő × erőkar, vagyis $M = Fr_{\perp} = Fr\sin\alpha$
A forgatónyomaték nulla, ha az erő hatásvonala átmegy a forgástengelyen, maximális ha merőleges a helyvektorra.

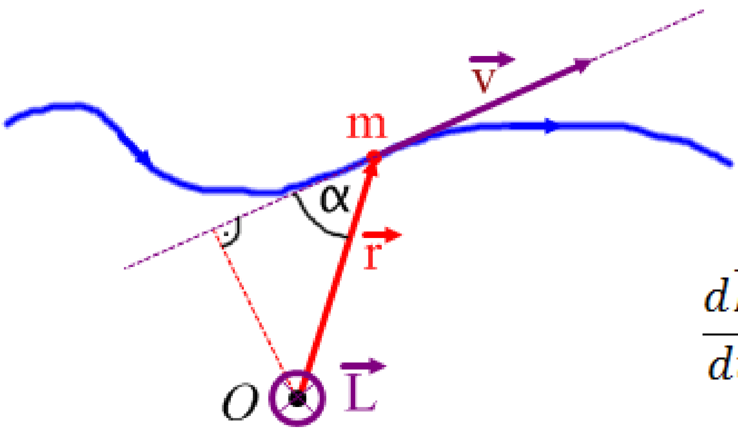
<u>iránya:</u> a vektorszorzat alapján (jobbkéz-szabály) merőleges az erő és a helyvektor által meghatározott síkra.

Perdület (impulzusmomentum)

Pontszerű test **perdületének** általános definíciója: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$
(hasonló a forgatónyomaték definíciójához, ami az erő momentuma)

Ha a helyvektor és a sebesség merőleges, mint pl. egyenletes körmozgásnál:

$$L = rmv = mrv = mr\omega r = mr^2\omega$$



A perdület vektor a forgatónyomaték hatására változik meg:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \vec{v}) = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right) =$$

$$= m(\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times (m\vec{a}) = \vec{r} \times \vec{F}_e = \vec{M}_e$$

Perdülettétel: $$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_e}$$

Tehetetlenségi nyomaték

<u>Speciális eset</u>: tömegpont rögzített tengely körül, állandó távolságban mozog (körmozgás)

$$L(t) = mr^2\omega(t)$$

Ekkor a perdületet idő szerint deriválva: $\frac{dL}{dt} = mr^2\frac{d\omega(t)}{dt} = mr^2\beta(t)$

β a szöggyorsulás, az mr^2 tag pedig a tömegpont **tehetetlenségi nyomatéka**.

Tömegpontra a tehetetlenségi nyomaték tehát: $\boxed{\theta = mr^2}$, ahol r a tengelytől mért távolság.

A perdülettételt felhasználva: $\frac{dL}{dt} = mr^2\frac{d\omega(t)}{dt} = \theta\beta(t) = M$

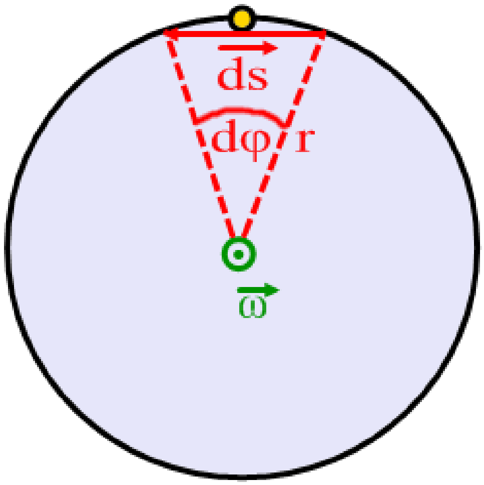
Megkaptuk a forgómozgás alapegyenletét: $\boxed{M = \theta\beta}$

A tömegpont **mozgási energiája**: $E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}\theta\omega^2$

Munka és teljesítmény

Az elemi munka egy infinitezimális elmozdulás során (körmozgás):

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m\vec{a} \cdot d\vec{s} = ma_t ds = m\beta r ds = m\beta r^2 d\phi = \theta\beta d\phi = M d\phi$$



Ebből a teljesítmény:

$$P = \frac{dE_K}{dt} = \frac{\delta W}{dt} = M\frac{d\phi}{dt} = M\omega$$

Haladó és forgó mozgások közötti analógia

	Haladó mozgás (1 dimenzió)	Forgó mozgás
változó	x	φ
(szög)sebesség	v_x	ω
(szög)gyorsulás	a_x	β
tehetetlenség	m	θ
A (szög)gyorsulás oka	$F_x = m a_x$	$M = \theta\beta$
Impulzus(momentum)	$p_x = m v_x$	$L = \theta\omega$
Kinetikus energia	$\frac{1}{2} m v_x^2$	$\frac{1}{2} \theta\omega^2$
munka	$F_x \Delta x$	$M\Delta\varphi$
teljesítmény	$F_x v_x$	$M\omega$

Kiterjedt testek, tömegpontrendszerek

Súlypont

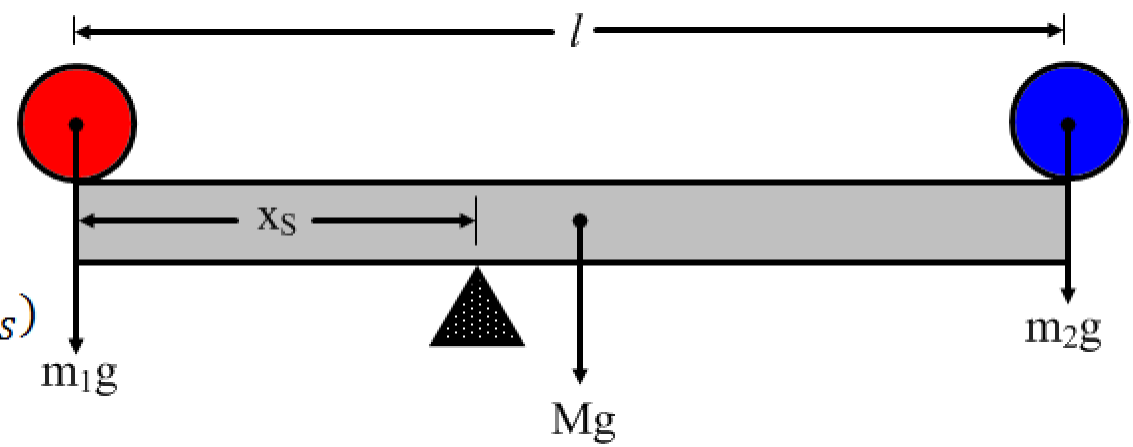
A testek mérete sokszor nem hanyagolható el a problémában szereplő méretekhez képest. A kiterjedésük miatt a haladó mozgás mellett a forgó mozgásukat is figyelembe kell venni.

A **súlypont** az a pont ami alatt úgy alátámaszthatjuk a testet, hogy az egyensúlyban legyen:

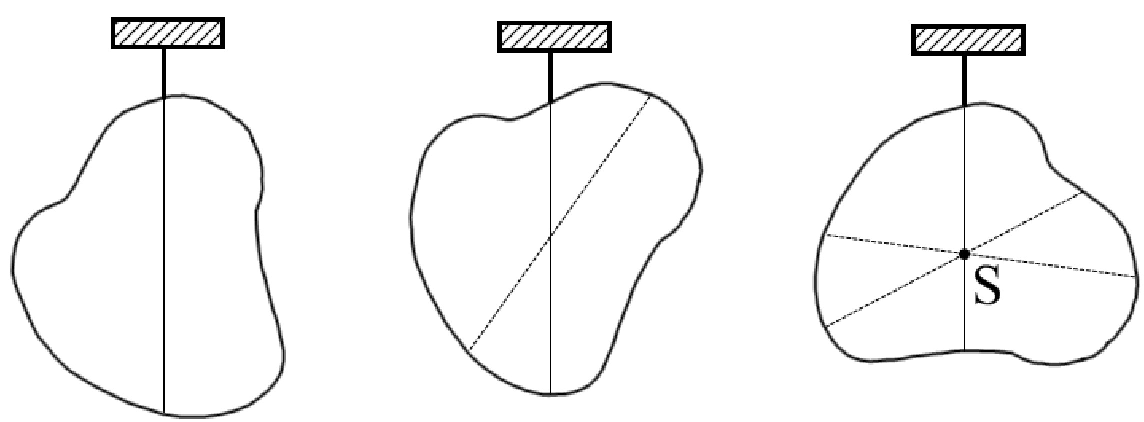
Az alátámasztás helyére az eredő forgatónyomatéknak nullának kell lennie. Például:

$$m_1 g x_S = Mg\left(\frac{l}{2} - x_S\right) + m_2 g(l - x_S)$$

$$x_S = \frac{Mg\left(\frac{l}{2}\right) + m_2 g l}{m_1 g + Mg + m_2 g}$$



Egy bonyolult alakú test súlypontját azt több pontjában felfüggesztve határozhatjuk meg, mint a függőleges vonalak metszéspontja:

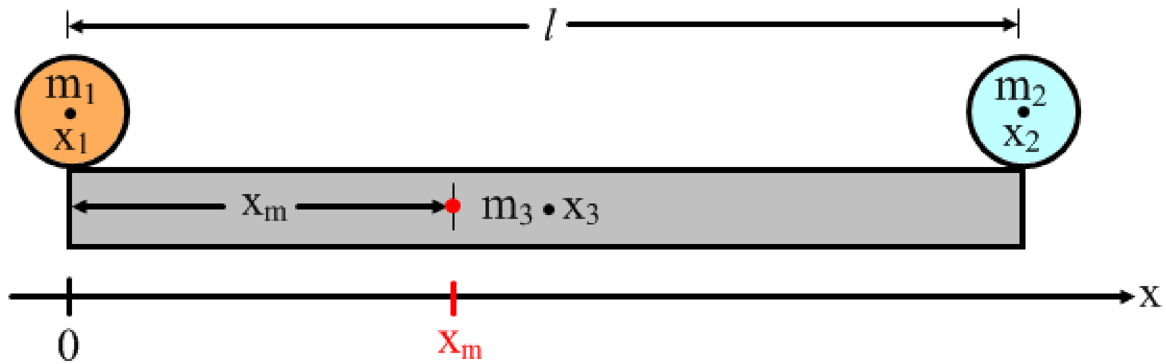


Tömegközéppont

Kiterjedt test **tömegközéppontjának** helye a testet felépítő pontok helyének tömegekkel súlyozott átlaga (illetve a részek tömegközéppontjainak tömegekkel súlyozott átlaga):

A példában az összetett test tömegközéppontjának *x* koordinátája:

$$x_m = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 l + m_3 \left(\frac{l}{2}\right)}{m_1 + m_2 + m_3}$$



A **tömegközéppont** helye általában: $(x_m, y_m, z_m) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, z_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \right) =$

$$= \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, x_i}{m}, \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, y_i}{m}, \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, z_i}{m} \right)$$

tehát: $\boxed{\vec{r}_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, \vec{r}_i}{m}}$

ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!

A legtöbb esetben a **súlypont** és a **tömegközéppont** helye ugyanott van, és a kettő közül bármelyik használható. Különbség a két pont helye között csak akkor van, ha a test mérete olyan nagy, hogy a gravitáció nem tekinthető a test minden pontjára ugyanolyan erősségűnek.