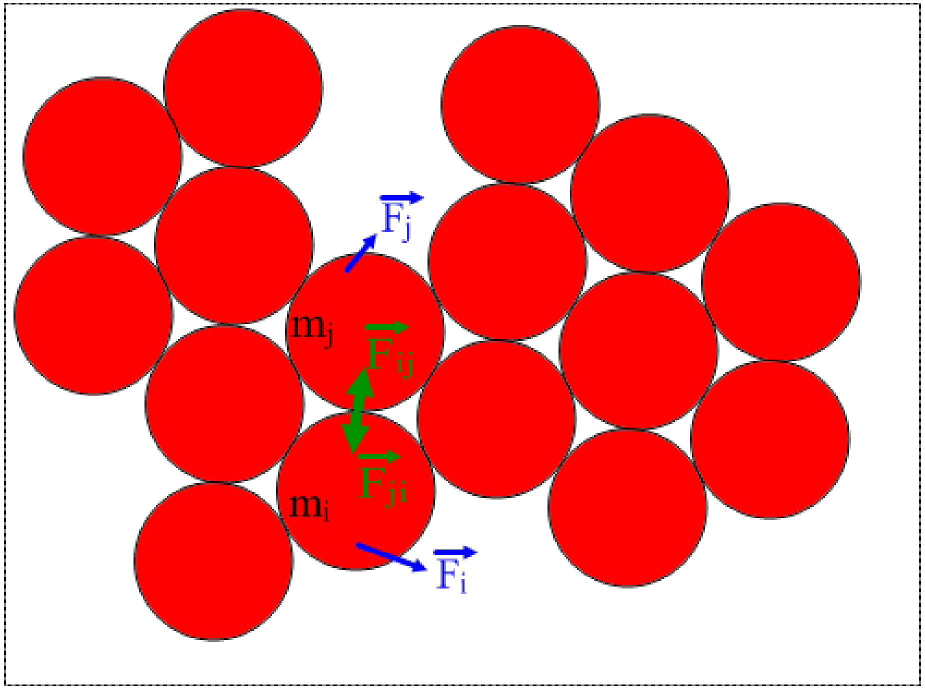
Lendülettétel tömegpontrendszerre

Pontrendszer mozgásának vizsgálatához írjuk fel a **lendülettételt** az egyik pontra (i):

A rá ható külső erők eredője: $\vec{F}_i$

A j-edik pont által kifejtett erő: $\vec{F}_{ji}$



A dinamika alapegyenletét is felhasználva az általános (i-edik) tömegpontra:

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_i = m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji}$$

Összegezve a test minden pontjára:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji}$$

A belső erők kiesnek (Newton 3. axiómája): $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$

Lendülettétel tömegpontrendszerre: $$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{p} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i}$$

Ha a pontrendszerre ható külső erők eredője nulla, akkor a lendület állandó.

Ütközések

Ha az ütköző testek zárt rendszert alkotnak (külső erők nem hatnak rájuk), akkor az ütközés során mindig teljesül a lendületmegmaradás.
A rendszer tagjainak lendülete összesen ugyanazt adja az ütközés előtt mint után:

$$\vec{p}_{A1} + \vec{p}_{B1} + \vec{p}_{C1} + \cdots = \vec{p}_{A2} + \vec{p}_{B2} + \vec{p}_{C2} + \cdots$$

$$m_A\vec{v}_{A1} + m_B\vec{v}_{B1} + m_C\vec{v}_{C1} + \cdots = m_A\vec{v}_{A2} + m_B\vec{v}_{B2} + m_C\vec{v}_{C2} + \cdots$$

Ez általában 3 független egyenletet jelent a lendület *x*, *y* és *z* komponenseire.
Erre akkor van szükség ha az ütközés térben játszódik le és nem centrális (pl. két egymáshoz vágott labda, melyek sebességvektorai nem a másik tömegközéppontjának irányába mutatnak, vagy egy szétrobbanó tűzijáték esetében is alkalmazható)
Billiárdgolyók ütközése az asztal síkjában két egyenletet eredményez.
Egyenes mentén mozgó két test centrális ütközése pedig csak egyet:

$$m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = m_A v_{A2} + m_B v_{B2}$$

Ha ellentétes irányban halad a két test, akkor ez egyik sebesség negatív.

Extrém esetek:

Tökéletesen rugalmatlan ütközésnél a két test összetapad: $v_{A2} = v_{B2}$ és $m = m_A + m_B$

Tökéletesen rugalmas ütközésnél a kinetikus energia is megmarad:

$$\frac{1}{2}m_A {v_{A1}}^2 + \frac{1}{2}m_B {v_{B1}}^2 = \frac{1}{2}m_A {v_{A2}}^2 + \frac{1}{2}m_B {v_{B2}}^2$$

Ütközési szám

A valóságos ütközések se nem tökéletesen rugalmatlanok, se nem tökéletesen rugalmasak. Az **ütközési szám** azt mutatja meg, hogy mennyire rugalmas az ütközés. Ez a szám a távolodási sebesség és a közeledési sebesség hányadosa.

Az ütközési szám:

$$k = \frac{v_{B2} - v_{A2}}{v_{A1} - v_{B1}}$$

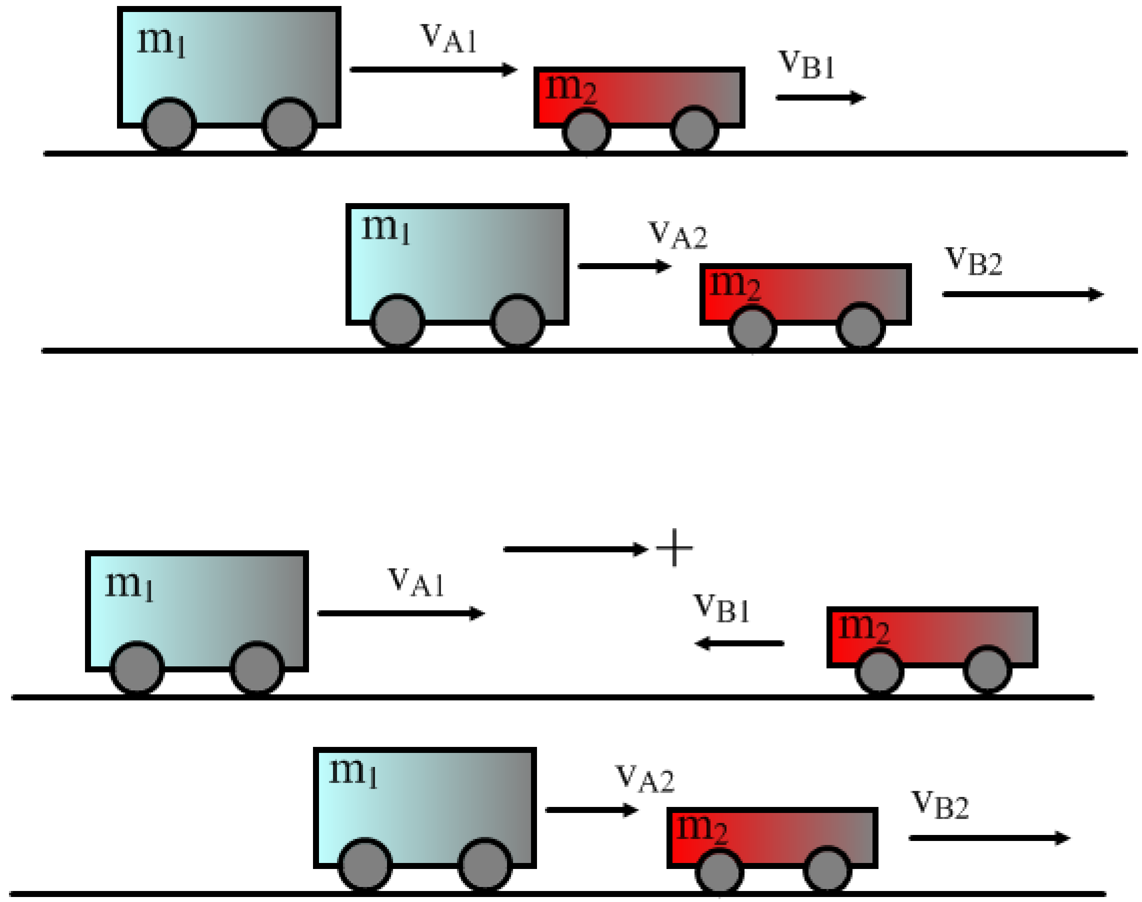
Extrém esetek:

tökéletesen rugalmatlan: $k = 0$

tökéletesen rugalmas: $k = 1$

általánosan: $0 \leq k \leq 1$

Egyszerűbb ezt használni a kinetikus energia megmaradása helyett, mert ez nem másodfokú.



ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!

Tömegközépponti tétel

A lendülettételt tovább alakítva, és felhasználva a tömegközéppont/súlypont definícióját:

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i\frac{d}{dt}\vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2}(m\vec{r}_S) = m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_S = m\vec{a}_S$$

<u>A **tömegközépponti tétel**</u>: $\boxed{m\vec{a}_S = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i}$

Pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha a rendszer összes tömege ebbe a pontba lenne egyesítve, és az összes külső erő erre a pontra hatna.

Perdülettétel és munkatétel

A **perdülettétel** a lendülettételhez hasonlóan levezethető.
A tömegpontrendszer perdületének idő szerinti deriváltja egyenlő az eredő forgatónyomatékkal:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_e}$$

A tömegpontrendszerre vonatkozó **munkatétel** azt mondja ki, hogy a rendszer kinetikus energiájának megváltozása egyenlő az összes erő (<u>külső és belső</u>) által a rendszeren végzett munkával:

$$\boxed{W = \Delta E_K}$$

A belső erők azért szerepelnek, mert a rendszer tömegpontjai közötti potenciális energia munkavégzés során átalakulhat a pontok kinetikus energiájává.
Például egy rúgó két végéhez kötött testek rezgése során, vagy a Naphoz közeledő üstökös esetében.

Tehetetlenségi nyomaték

Egy tömegpontrendszer **tehetetlenségi nyomatéka** az egyes tömegpontok tehetetlenségi nyomatékainak összege:

$$\theta = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^{\,2}$$

Folytonos tömegeloszlás esetén az infinitezimális dV térfogatú darab tömege: ρdV
Tehetetlenségi nyomatéka: $dmr^2 = \rho dVr^2$
Tehát az egész test tehetetlenségi nyomatéka: $\boxed{\theta = \int_V \rho r^2 dV}$ r a tengelytől mért távolság.

Steiner tétel: Ha tudjuk a tehetetlenségi nyomatékot egy, a súlyponton átmenő tengelyre (θ_s), akkor a vele párhuzamos, tőle d távolságban lévő tengelyre a tehetetlenségi nyomaték:

$$\boxed{\theta_d = \theta_s + md^2}$$

Merev testek mechanikája

Egy **merev test** bármely két pontjának távolsága időben állandó (nem deformálódik).

<u>Egy merev test egyensúlyának feltételei</u>:
• a testre ható külső erők eredője nulla **<u>és</u>**
• a külső erők bármely pontra (illetve tengelyre) vonatkozó forgatónyomatékainak eredője nulla.

Itt az egyensúly nem csak a statikus állapotot jelenti, hanem állandó sebességű mozgást és állandó szögsebességű forgást is.

<u>Változó mozgás esetén</u>:
Merev test mozgása tehát haladó mozgásból és forgómozgásból áll.
- A haladó mozgást (a tömegközéppont gyorsulását) a **tömegközépponti tételből** kaphatjuk meg.

$$m\vec{a}_S = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

- A forgó mozgás szöggyorsulását pedig a **forgómozgás alapegyenletéből** lehet meghatározni.

$$M_e = \theta\beta$$

Folyadékok és gázok mechanikája

Hidrosztatikai nyomás

A folyadékok és gázok közös tulajdonsága, hogy alakjukat szabadon változtatják. Ha a részecskékből álló felépítés helyett ezeket folytonos tömegeloszlásúnak tekintjük, akkor **kontinuum**ról beszélünk.

<u>**Hidrosztatika**</u>: nyugvó folyadékok mechanikája

Nyomás: Egy pontban a nyomás a pontot körülvevő (végtelen) kicsiny felületre ható erő felületre merőleges komponense, osztva a felület nagyságával. Skalár mennyiség.

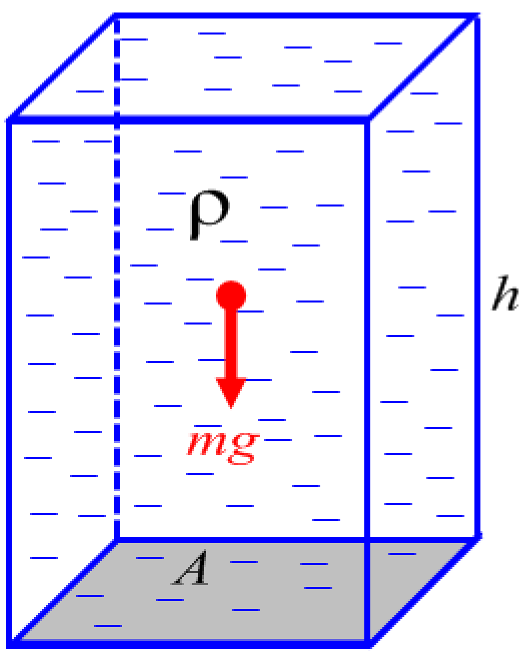
$$p = \lim_{A\to 0} \frac{F_\perp(A)}{A}$$

Mértékegysége: $[p] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa}$ (Pascal)

A **hidrosztatikai nyomás** a folyadék (*h* magasságú oszlop) súlyereje által okozott nyomás (egyenletesen oszlik el):

$$p = \frac{F_\perp(A)}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{V\rho g}{A} = \frac{Ah\rho g}{A} = h\rho g$$

ρ: sűrűség



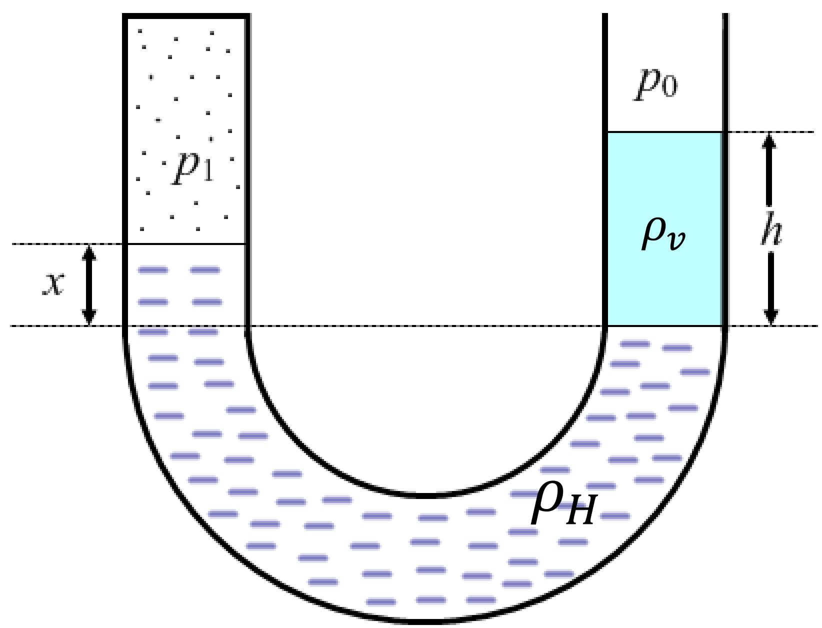
Mivel a folyadék alakja szabadon változhat, adott mélységben a nyugvó folyadék nyomása nem függ a felület irányításától, a kifejtett erő pedig mindíg merőleges a felületre.

Pascal törvénye: Egynemű nyugvó folyadék azonos magasságú pontjaiban a nyomás azonos.

Pascal törvénye - Példa

Egy U alakú üvegcső baloldali vége zárt, a másik nyitott. A csőben alul 13,6g/cm^3 sűrűségű higany, a jobb szárban efölött 50cm magas vízoszlop van. A légköri nyomás 1bar, a bal szárban a Hg fölött a levegő nyomása 0,9bar. Mekkora a magasságkülönbség a két higanyszint között?

$p_0 = 10^5$Pa, $p_1 = 0{,}9 \cdot 10^5$Pa, $h = 50$cm



A higanyban, mint egynemű nyugvó folyadékban a szaggatott vonallal megjelölt szinten a bal és jobb oldalon meg kell egyeznie a nyomásnak:

$$p_b = p_j$$

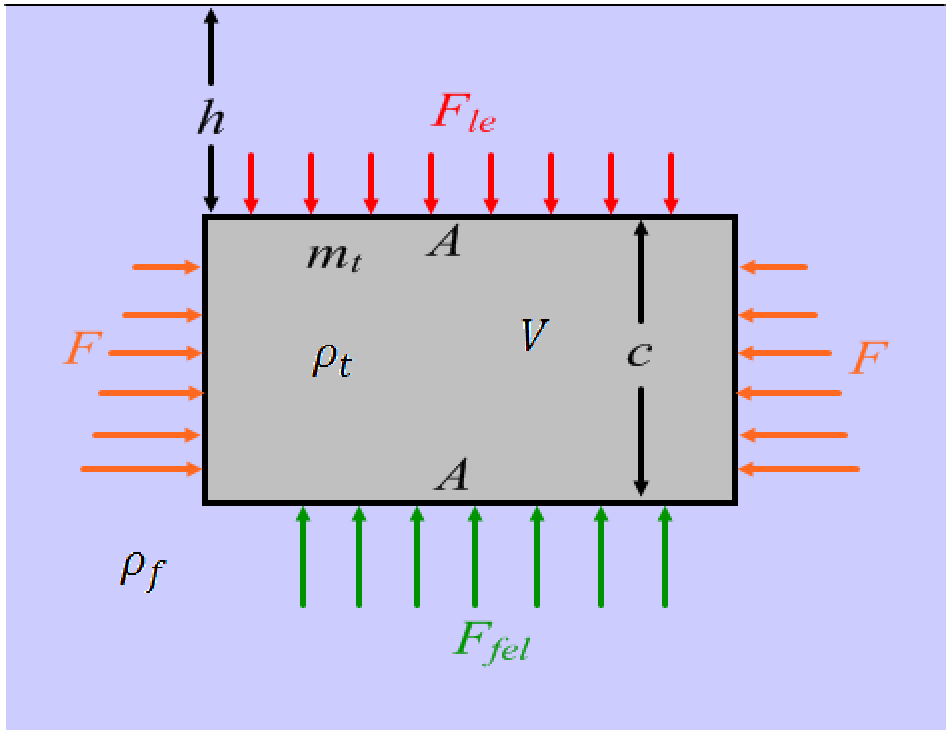
$$p_1 + x\rho_H g = p_0 + h\rho_v g$$

$$x = \frac{p_0 + h\rho_v g - p_1}{\rho_H g} = \cdots = 11{,}17\text{cm}$$

Felhajtó erő

A **felhajtó erő** a folyadék által a test teljes felületére kifejtett eredő erő.
A téglatest alakú test lapjaira:
- elülső és hátulsó eredője nulla
- bal oldali és jobb oldali eredője nulla
- alsó és felső eredője...

$$F_f = F_{fel} - F_{le} = p_{lent}A - p_{fent}A =$$
$$= \rho_f g(h+c)A - \rho_f ghA = \rho_f gcA =$$
$$= \rho_f Vg = m_f g$$



V a test által kiszorított folyadék térfogata, aminek tömege m_f
Tehát a felhajtó erő nagysága egyenlő a kiszorított folyadék súlyával. Ez más alakra is igaz.

Archimédesz törvénye: Minden folyadékba mártott testre felhajtó erő hat, amely egyenlő a kiszorított (bemerülő rész által) folyadék súlyával.

Ha a test sűrűsége nagyobb mint a folyadéké akkor elmerül, mert a felhajtóerő kisebb mint a test súlya. Ha a folyadék sűrűsége nagyobb, akkor a test egy része nem merül el, a test úszik.

Tömegmegmaradás

A **hidrodinamika** a folyadékok, mint kontinuumok áramlását leíró tudományág.

Kétféle tárgyalásmód:

1. Lagrange-módszer: az egyes kiszemelt folyadékrészekre a Newton féle mozgásegyenletet írjuk fel, és a kezdeti feltételeket használva megoldjuk.

2. Euler-féle leírás: a különböző pontokban az ott áramló folyadék tulajdonságait mérjük (pl. sebesség, nyomás, sűrűség).
Ha ezek időben állandóak minden pontban, akkor **stacionárius** áramlásról beszélünk.

<u>Kontinuitási egyenlet</u>: A tömeg megmaradó mennyiség, nem keletkezik, és nem tűnik el.
Tekintsünk egy nyugvó V térfogatot, amelyet az A zárt felület határol. A dt idő alatt a dA elemi felületdarabon kiáramló tömeg: $dm = \rho dV = \rho dA v \cos\alpha \, dt = \rho\vec{v} \cdot d\vec{A} dt$
Tehát időegység alatt: $\frac{dm}{dt} = \rho\vec{v} \cdot d\vec{A}$

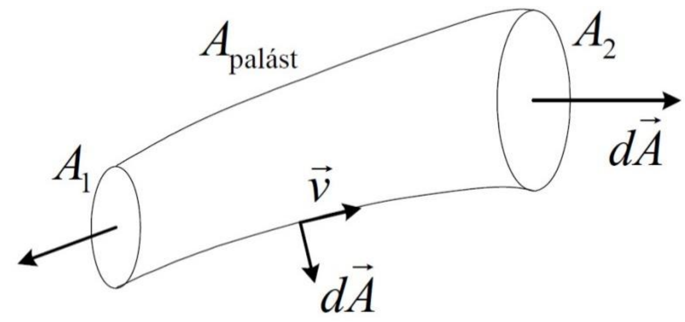
A V térfogatból a teljes A felületen keresztül időegység alatt kiáramló tömeg megegyezik a térfogatban lévő tömeg csökkenésével (negatív deriváltjával):

$$-\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \oint_A \rho\vec{v} \cdot d\vec{A}$$

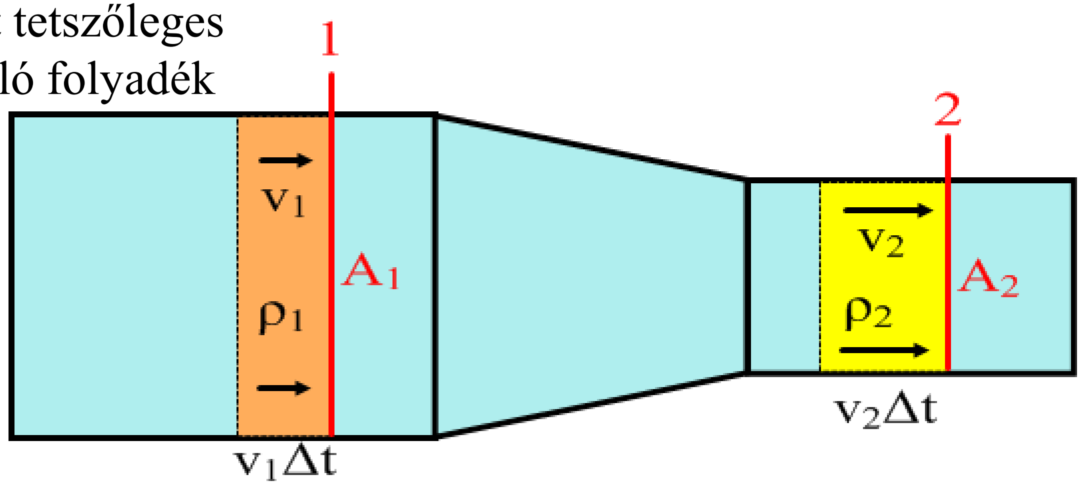
Kontinuitási egyenlet

<u>Stacionárius (időben állandó) áramlás:</u> Minden idő szerinti derivált nulla.

$$0 = \oint_A \rho\vec{v}\cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \rho\vec{v}\cdot d\vec{A} + \int_{A_2} \rho\vec{v}\cdot d\vec{A} + \int_{A_p} \rho\vec{v}\cdot d\vec{A}$$



A palástra vett integrál nulla, mert a sebesség párhuzamos a felülettel. Tehát a két végen történő be- és kiáramlás ki kell, hogy ejtse egymást.
Ennek eredménye, hogy egy cső két tetszőleges helyén a keresztmetszeteken átáramló folyadék tömege megegyezik.



Az A_1 és A_2 keresztmetszetű helyekre Δt idő alatt:

$$m_1 = m_2$$
$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$$
$$\rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$$

$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$ a **tömegáram** ugyanaz a cső mentén.

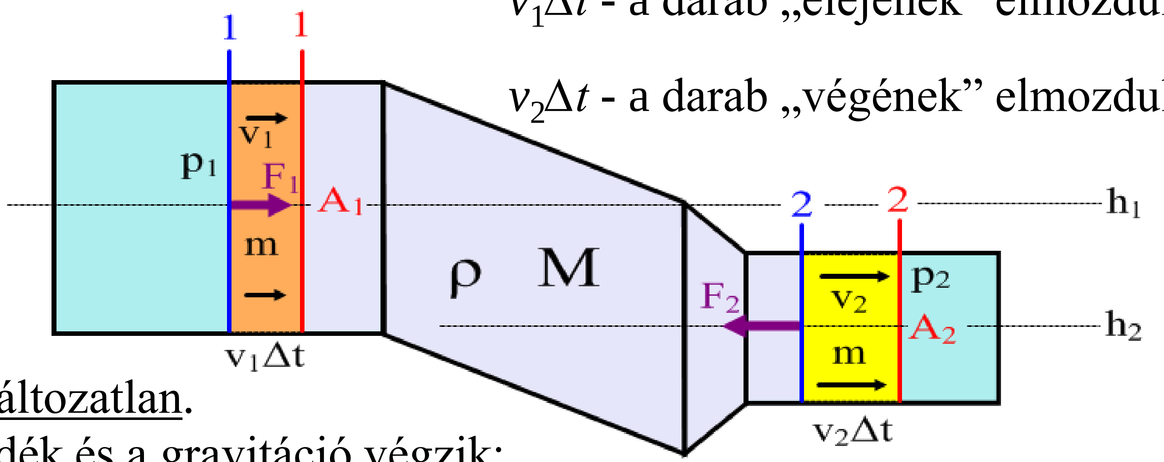
Összenyomhatatlan folyadékra ($\rho_1 = \rho_2$): $A_1 v_1 = A_2 v_2$ a **térfogatáram** is ugyanaz a cső mentén.

Bernoulli egyenlet

Alkalmazzuk a $W = \Delta E_K$ munkatételt a h_1 magasságban lévő A_1 keresztmetszetű rész és a h_2 magasságban lévő A_2 keresztmetszetű rész között az $m + M$ tömegű összenyomhatatlan ρ sűrűségű folyadékdarabra, stacionárius áramlás esetén. Kis Δt idő alatt:

$v_1\Delta t$ - a darab „elejének" elmozdulása

$v_2\Delta t$ - a darab „végének" elmozdulása



Az M tömegű közbülső rész <u>változatlan</u>.
A munkát a szomszédos folyadék és a gravitáció végzik:

$$W = W_f + W_g = F_1 v_1 \Delta t - F_2 v_2 \Delta t + mg(h_1 - h_2) = p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t + mg(h_1 - h_2) =$$
$$= p_1 \Delta V - p_2 \Delta V + \rho \Delta V g(h_1 - h_2) = \Delta V(p_1 - p_2 + \rho g h_1 - \rho g h_2)$$

A kinetikus energia megváltozása: $\Delta E_K = E_{K2}(m) + E_K(M) - E_{K1}(m) - E_K(M)$

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} m {v_2}^2 - \frac{1}{2} m {v_1}^2 = \Delta V \left(\frac{1}{2} \rho {v_2}^2 - \frac{1}{2} \rho {v_1}^2 \right)$$

Tehát:

$$p_1 - p_2 + \rho g h_1 - \rho g h_2 = \frac{1}{2} \rho {v_2}^2 - \frac{1}{2} \rho {v_1}^2 \rightarrow \boxed{p_1 + \frac{1}{2} \rho {v_1}^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho {v_2}^2 + \rho g h_2}$$

Bernoulli egyenlet - Példa

Milyen sebességgel folyik ki egy vödör alján fúrt lyukon a víz, ha a vödörben *h* magasságig van víz?

Feltételezve, hogy a vízszint nagyon lassan csökken: $v_1 \approx 0$

A Bernoulli-egyenletet felhasználva:

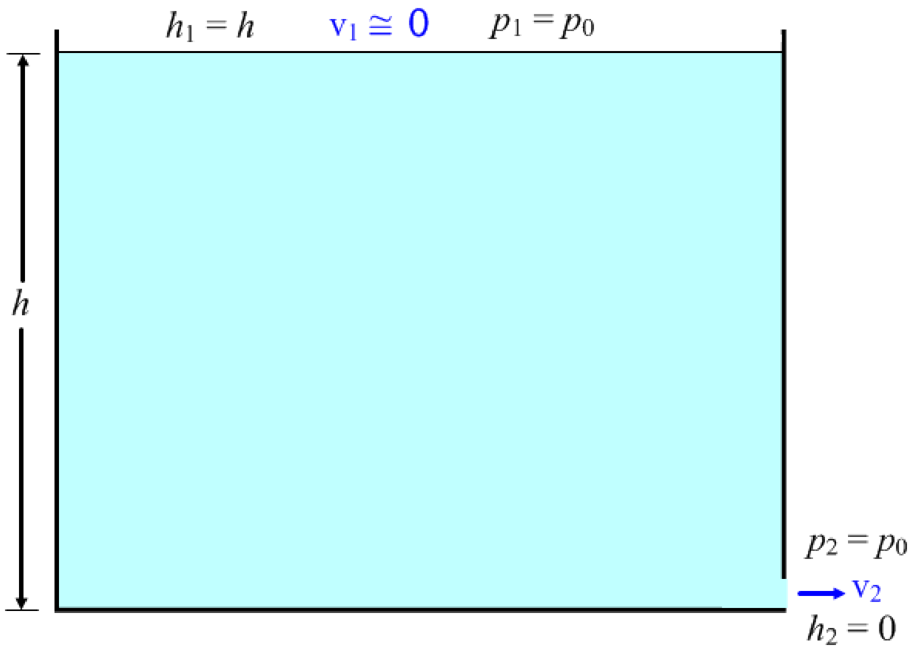
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 + \rho g h_2$$

$$p_0 + 0 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 + 0$$

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho {v_2}^2$$

$$2gh = {v_2}^2$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$



A sebesség megegyezik azzal, amit egy *h* magasságból szabadon eső test érne el.

Termodinamika
(Hőtan)

Termodinamika

A **hőtan** nagyszámú részecskéből (pl. gázmolekulából) álló makroszkópikus rendszerekkel foglalkozik. A nagy számok miatt érdemes a **mólt** bevezetni, ami egy **Avogadro-számnyi** ($6{,}022 \cdot 10^{23}$ db) részecskét jelent (12-es tömegszámú szénatomok száma 12 gramm szénben).
Ennek megfelelően az atomi tömegegység a 12-es tömegszámú szénatom tömegének 1/12-ed része: 1 ATE = $1{,}661 \cdot 10^{-27}$ kg

A végbemenő folyamatok **kvázisztatikusak**, a rendszert leíró mennyiségek a folyamat során minden pillanatban ki vannak egyenlítődve (egyensúlyi állapotokon keresztüli „lassú” változás).

A rendszert leíró makroszkópikusan mérhető mennyiségek az **állapothatározók**.

Extenzív állapothatározók: a rendszer egészére jellemzők, és több rendszer egyesítésekor ezek összeadódnak (pl. térfogat, részecskeszám, tömeg, energia).

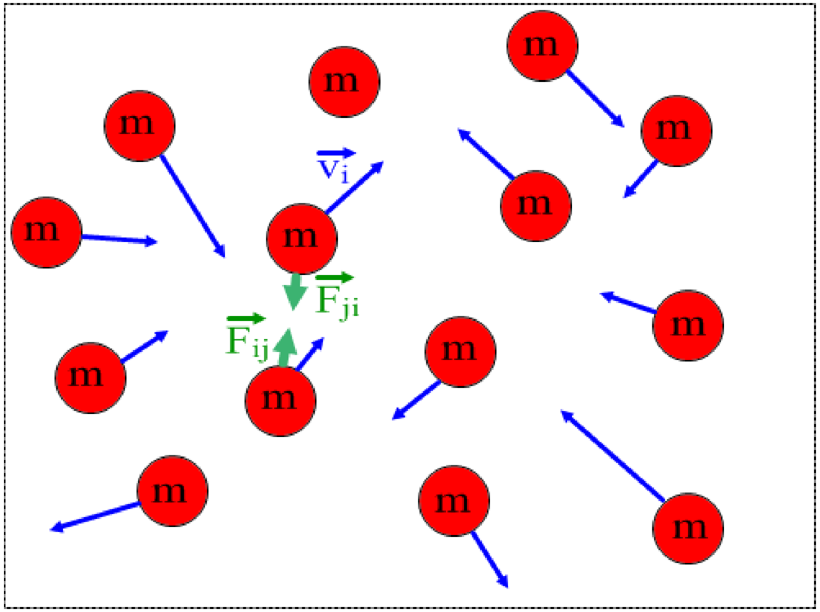
Intenzív állapothatározók: pontról pontra mérhetők, több rendszer egyesítésekor ezek kiegyenlítődésre törekednek (pl. nyomás, hőmérséklet, sűrűség, energiasűrűség).

Fenomenologikus elmélet: leírás csak az állapothatározókon keresztül.
Statisztikus elmélet: a nagyszámú részecskére statisztikai törvényszerűségek alkalmazása.

Belső energia

A rendszer **belső energiája** a részecskék egymáshoz (rendszer tömegközéppontjához) képesti <u>rendezetlen</u> mozgásából származó **kinetikus energia** és a részecskék közötti Van der Waals kölcsönhatáshoz tartozó **potenciális energia**.

N db részecskére: $E_b = \sum_{i=1}^{N} E_{Ki} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} E_{Pij}$



<u>Brown-mozgás:</u> A kálium-permanganát ($KMnO_4$) oldódása vízben azt mutatja, hogy a víz részecskéi nagysebességgel ütköznek a festék rögöcskékkel. A részecskéknek tehát sebességük, és így mozgási energiájuk van. Mivel számuk igen nagy, ez az energia jelentős.

Bizonyos esetekben a részecskék közötti kölcsönhatások (rugalmas ütközéseket leszámítva) elhanyagolhatók (ideális gázok), ekkor a második tag nulla.

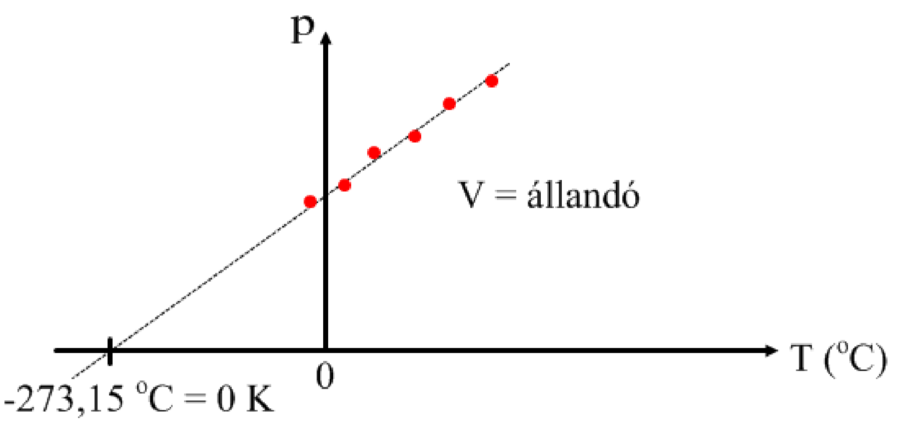
Magasabb hőmérsékleten a mozgás intenzívebb, így a belső energia nagyobb.

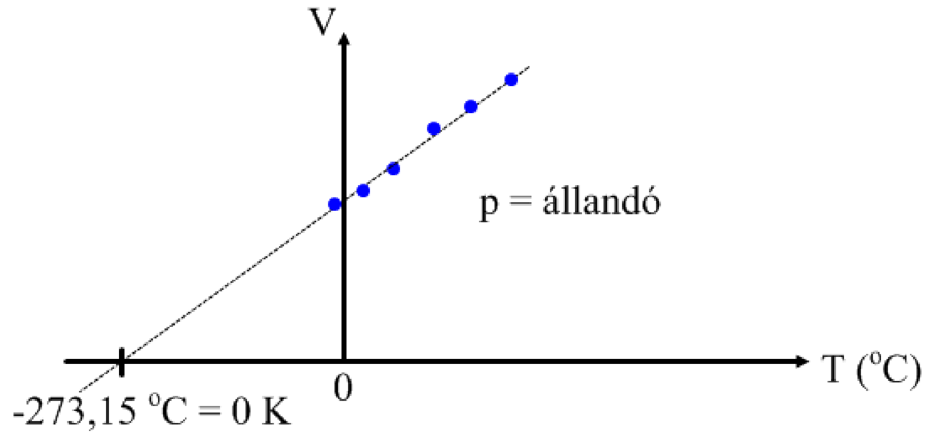
Rendezett mozgás mechanikai energiája disszipáció során (pl. súrlódás, közegellenállás) belső energiává alakulhat, növelve a test hőmérsékletét

Abszolút hőmérsékleti skála

Ideális gáz térfogatát tanulmányozva állandó nyomáson, vagy nyomását tanulmányozva állandó térfogaton, mindkét esetben a hőmérsékletnek lineáris függvénye az eredmény.

A gáz térfogata illetve nyomása lineárisan nullához tart csökkenő hőmérséklet esetén.





Abszolút nulla: ahol a lineáris extrapoláció egyenese metszi a hőmérséklet tengelyt.

T = -273,15 °C = 0 K (Kelvin) - A hőmérséklet SI mértékegysége.

Az olvadó jég hőmérséklete (0 °C): 273 K (kerekítve)
A forrásban lévő víz hőmérséklete (100 °C): 373 K (kerekítve)
A különbség tehát kelvinben is ugyanannyi, mint Celsius fokokban!