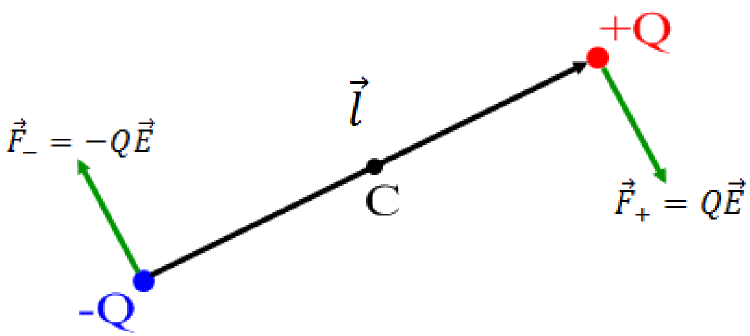
Elektromos dipólus

Egy pozitív és egy negatív töltésből áll melyek egymástól *l* távolságra vannak rögzítve.

<u>Dipólusmomentum:</u> $\vec{p} = Q\vec{l}$



Dipólusra ható eredő erő homogén térben:

$$\vec{F}_e = \vec{F}_- + \vec{F}_+ = -Q\vec{E} + Q\vec{E} = 0$$

Dipólusra ható eredő forgatónyomaték (a C pontra) homogén térben:

$$\vec{M}_C = \vec{M}_{C-} + \vec{M}_{C+} = \vec{r}_- \times \vec{F}_- + \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ = -\frac{\vec{l}}{2} \times \vec{F}_- + \frac{\vec{l}}{2} \times \vec{F}_+$$

$$= -\frac{\vec{l}}{2} \times \left(-Q\vec{E}\right) + \frac{\vec{l}}{2} \times Q\vec{E} = Q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

A dipólust a tér vele egy irányba igyekszik befordítani – stabil egyensúlyi helyzet

Ha a dipólmomentum párhuzamos a térrel, de ellentétes irányú – labilis egyensúly

Polarizáció

Töltés-középpont: $\vec{r}_{tkp} = \dfrac{\sum Q_i \vec{r}_i}{\sum Q_i}$

Apoláros molekulák: a + és a – tkp. egybeesik (pl. H_2 és O_2)

Poláros molekulák: a + és a – tkp. nem esik egybe (pl. HCl és H_2O)

Indukált polarizáció: Az elektromos tér széthúzza a töltés-középpontokat.

Orientációs polarizáció: Az elektromos tér a poláris molekulák által alkotott dipólusokat a tér irányába beforgatja (alacsonyabb hőmérsékleten számottevőbb a hatás).

Az elektromos polarizáció vektor: Egy dielektrikum *A* pontja körüli kicsiny térfogatban található molekulák dipólnyomatékának eredője.

$$\vec{P}(A) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{p_i}}{\Delta V} \qquad [\vec{P}] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

Az anyagok nagy részére a polarizáció egyenesen arányos a térerősséggel:

$\vec{P} = \kappa \varepsilon_0 \vec{E}$ κ: elektromos szuszceptibilitás

Elektromos indukcióvektor

Elektromos indukcióvektor: felhasználva a térerősséget és a polarizáció vektort

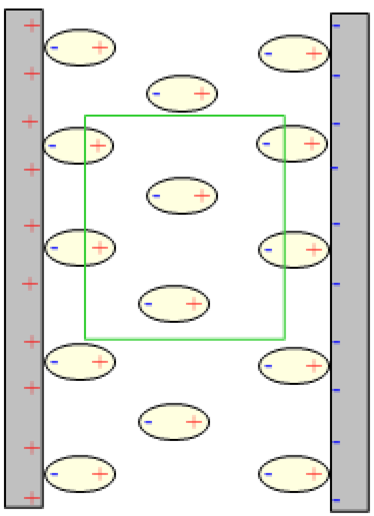
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad [\vec{D}] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

Lineáris közelítéssel: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \kappa \vec{E} = \varepsilon_0 (1+\kappa) \vec{E}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

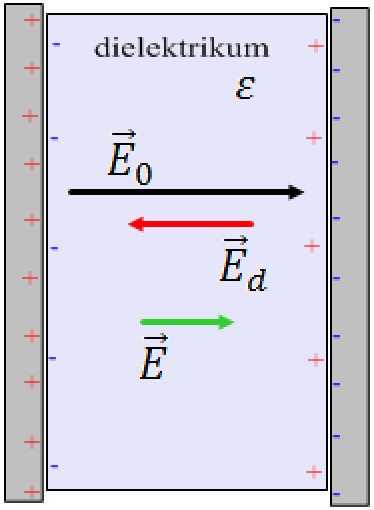
ε_r és ε a relatív, illetve az abszolút permittivitás

Dielektrikumok használata:



$\vec{E}_0$ ilyen tér lenne vákuumban

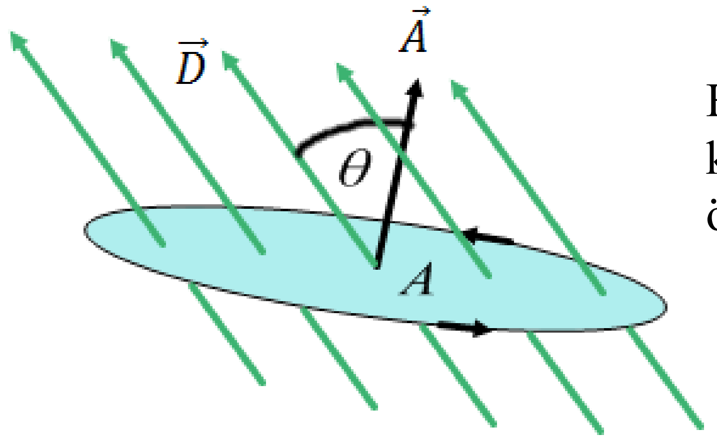
$\vec{E}_d$ ilyen teret okoz a dielektrikum



$\vec{E}$ ez lesz az eredő a dielektrikumban

Elektromos fluxus

<u>Elektromos fluxus:</u> Megadja a felületet átdöfő indukcióvonalak előjeles számát.



Ha az indukció a felület mentén homogén:

$$\psi = DA\cos\theta = \vec{D}\cdot\vec{A}$$

Ha nem homogén az indukció akkor a felületet kicsi darabokra bontjuk és a járulékokat összegezzük:

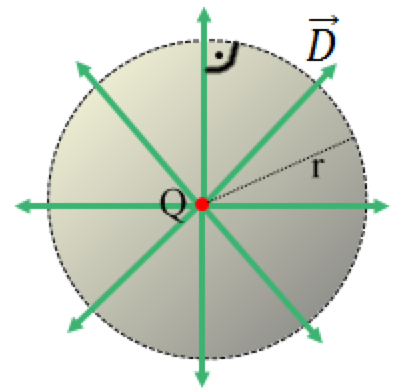
$$\psi = \int_F \vec{D}\cdot d\vec{A}$$

Az elektrosztatika második alaptörvénye

Zárt felületre vett fluxus a ponttöltéstől *r* távolságban:

vákuum esetén: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}\vec{e}_r$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Q}{r^2}\vec{e}_r$



$$\psi = \oint_F \vec{D} \cdot d\vec{A} = \oint_F \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r \cdot d\vec{A} = \oint_F \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2} dA =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2}\oint_F dA = \frac{4\pi r^2}{4\pi}\frac{Q}{r^2} = Q$$

Bármilyen felületre igaz: zárt felületre vett elektromos fluxus egyenlő a felületben foglalt töltéssel.

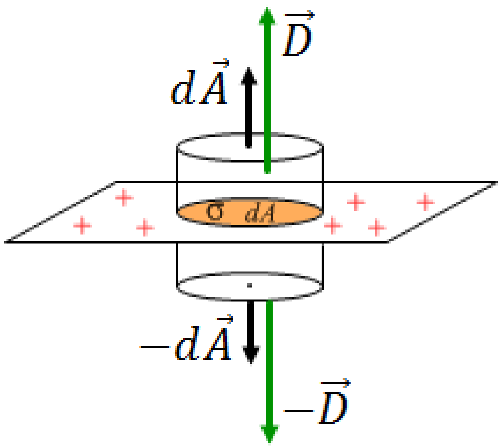
<u>Elektrosztatika II. alaptörvénye (Gauss törvény):</u> $\oint_F \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$

Dielektrikumok esetén is igaz, a kémiai anyag jelenléte az elektromos indukciót nem befolyásolja, mert annak forrásai csak a valódi (szabad) töltések.

A Gauss törvény differenciális (lokális alakja): $\mathrm{div}\vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \rho$ (bármely pontban)

Példák a Gauss törvény használatára

Végtelen töltött membrán σ felületi töltéssűrűséggel:



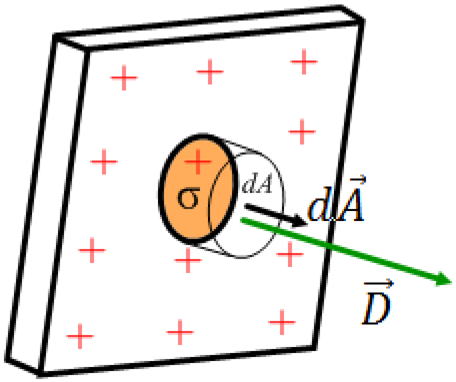
$$\oint_F \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

$$\left.\begin{aligned} \oint_F \vec{D} \cdot d\vec{A} = DdA + (-D)(-dA) = 2DdA \\ Q = \sigma dA \end{aligned}\right\} =$$

$$2DdA = \sigma dA$$

$$D = \frac{\sigma}{2} \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

Végtelen töltött felület σ felületi töltéssűrűséggel:

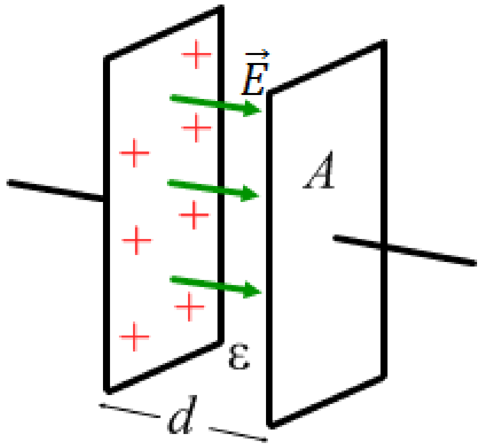


$$\oint_F \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

$$\left.\begin{aligned} \oint_F \vec{D} \cdot d\vec{A} = DdA \\ Q = \sigma dA \end{aligned}\right\} =$$

$$D = \sigma \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Síkkondenzátor kapacitása



$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma A}{Ed} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\varepsilon} d} = \varepsilon \frac{A}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$$

Elektromos mező energiája: A kondenzátor annyi energiát tárol, mint amennyi a feltöltéséhez kell.
Tegyük fel már van rajta $q(t)$ töltés és a feszültség $u(t)$.
Ekkor további dq töltés szétválasztásához végzendő munka:

$$dW = u(t)dq = \frac{q(t)}{C} dq$$

A teljes feltöltésre $q = 0$ és $q = Q$ között:

$$W = \int_0^Q u(t)dq = \int_0^Q \frac{q(t)}{C} dq = \left[\frac{q^2}{2C}\right]_0^Q = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C^2 U^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}$$

A térfogati energiasűrűség:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\frac{CU^2}{2}}{Ad} = \frac{\frac{\varepsilon A}{d} \frac{E^2 d^2}{2}}{Ad} = \frac{1}{2} \varepsilon E \cdot E = \frac{1}{2} D \cdot E$$

Általános esetben: $w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$ ha a közeg anizotrop, így akkor is érvényes

Stacionárius áram (egyenáram)

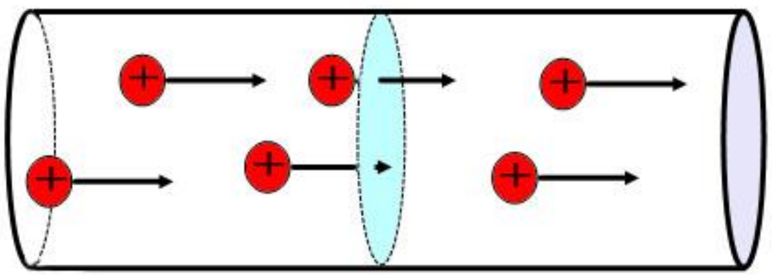
Elektromos áramerősség

Két különböző potenciálon lévő fémet vezetővel összekötve töltések áramlanak amíg a potenciál ki nem egyenlítődik.

Az elektromos áram iránya a pozitív töltéshordozók áramlási iránya.

<u>Áramerősség:</u> Egy vizsgált felület keresztmetszetén időegység alatt átáramló töltés.

$$[I] = \mathrm{A(amper)} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$$



Amennyiben az áramerősség állandó:

$$I = \frac{Q}{t}$$

Ha az áramerősség időben változik, a t_1 és t_2 között átáramlott töltés megadható mint:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$$

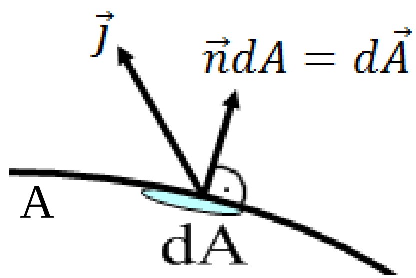
Háztartási gépekben néhány tizedtől néhány amper erősségű áram. Halálos: kb. 0,5 A

Áramsűrűség vektor

<u>Elektromos áramsűrűség vektor:</u> egy pontban értelmezett, nagysága megegyezik az áramlás irányára merőleges egységnyi felületen időegység alatt átáramló töltéssel. Iránya a pozitív töltések áramlási iránya.

Az áramsűrűség vektor nagysága: $j = \lim_{A \to 0} \frac{I}{A}$ Mértékegysége: $[j] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$

Egy bármely felületen átáramló áram erőssége általánosan: $I = \int_{\mathrm{A}} \vec{j} \cdot d\vec{A}$



ahol

$$\vec{j} \cdot d\vec{A} = \vec{j} \cdot \vec{n}dA = j_n dA$$

egy felületelemre számolt elemi áramerősség.

Ha az áramsűrűség vektor a felület minden pontjában ugyanakkora, és minden pontban merőleges a felületre, akkor:

$$I = jA$$

Áramforrások

A folyamatos töltésáramlás fenntartásához szükség van olyan idegen (nem elektromos) erőre amely a pozitív töltéshordozókat visszakényszeríti a magasabb potenciálú helyre.

Áramforrások azok a berendezések, melyekben ilyen erők működnek.

Az elektromos energia forrása az áramforrásokban lehet pl.
• mechanikai energia (generátorok, dinamók)
• kémiai energia (galvánelemek, akkumulátorok)
• hőenergia (termoelem)
• fényenergia (fotocella)

A q töltésre ható idegen erő: $\vec{F}^*$ Ebből definiáljuk az idegen térerősséget: $\vec{E}^* = \dfrac{\vec{F}^*}{q}$

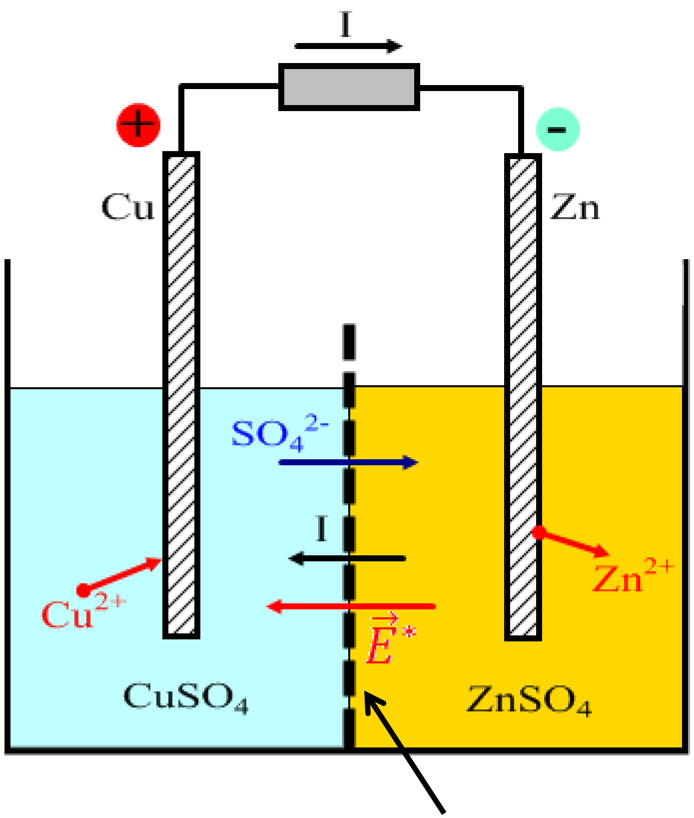
Az elektromotoros erő definíciója: $\varepsilon = \int_{-}^{+} \vec{E}^* \cdot d\vec{r}$ az áramforrás belsejében a – és + pólusok között integrálva.

Az áramforrásban az idegen erő miatt a negatív pólus felől a pozitív felé folyik az áram.

Fogyasztó: Olyan vezető amelyben idegen erő nincs jelen. Egy fogyasztóban az áram a magasabb potenciálú helyről az alacsonyabb felé folyik.

Elektromos áram galvánelemben

Daniell-elem



diafragma
(csak szulfát-ionok
jutnak át)

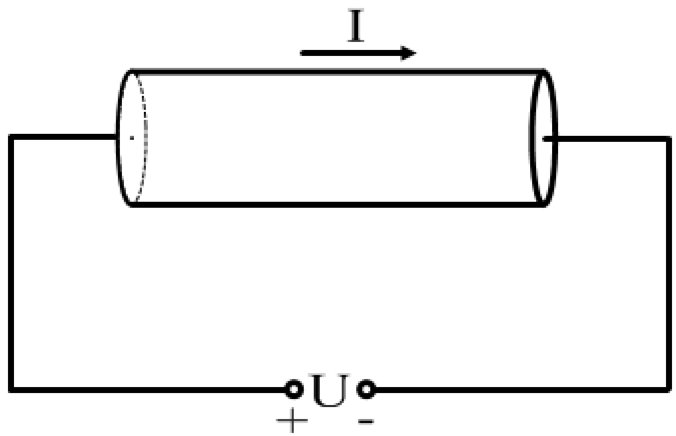
Kémiai energia alakul át elektromos energiává. Porózus anyaggal elválasztott cink-szulfát és réz-szulfát oldatok, bennük fém elektródákkal.
Cink beoldódik, két elektront hátrahagyva.
Ezek a vezetőn keresztül a rézre kerülnek.
A kiváló réz felveszi az elektronokat.

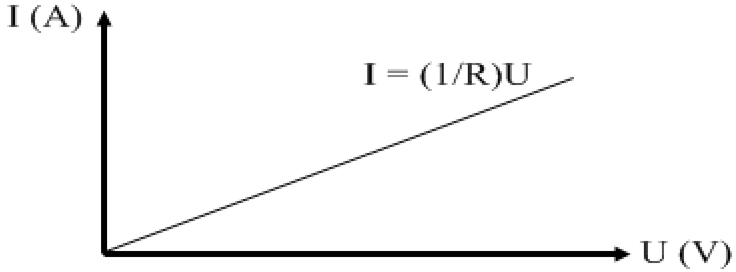
Az áramforrásban az idegen erő miatt a negatív pólus felől a pozitív felé folyik az áram.

Egy fogyasztóban az áram a magasabb potenciálú helyről az alacsonyabb felé folyik.

Ohm-törvény (integrális alak)

Tapasztalat szerint egy homogén vezetőben folyó áram erőssége (állandó hőmérsékleten) arányos a vezető két vége közötti feszültséggel:





Hányadosuk a vezető két vége közötti ellenállás:

$$R = \frac{U}{I} \qquad [R] = \Omega(\text{ohm}) = \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

Ez a törvény fémekre és ötvözeteikre bizonyos határok között jó közelítéssel igaz, ellentétben például a félvezetőkkel vagy elektrolitokkal.

Egyenáramú áramkörök

Stacionárius elektromos áram (egyenáram): az összes fizikai mennyiség állandó, és a töltések időben állandósult módon áramlanak.

A töltésmegmaradás törvényét a kontinuitási egyenlet írja le:

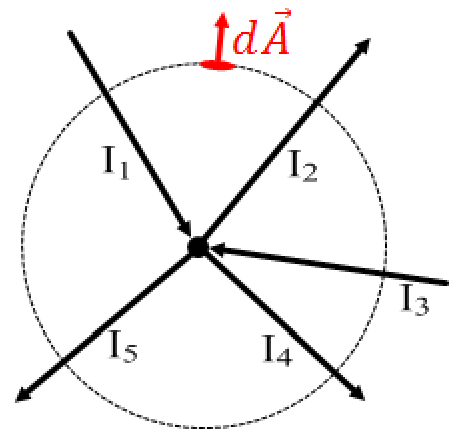
$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\oint_A \vec{j}\cdot d\vec{A}$$

A rögzített *V* térfogatot az *A* zárt felület határolja, melynek normálisa kifelé mutat. ρ a térfogati töltéssűrűség.

Stacionárius esetben a baloldal nulla, így a befolyó (-) és kifolyó (+) áramok algebrai (előjeles) összege zérus.

Kirchhoff I. törvénye (csomóponti törvény):

$$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0$$



$$I_2 + I_4 + I_5 - I_1 - I_3 = 0$$

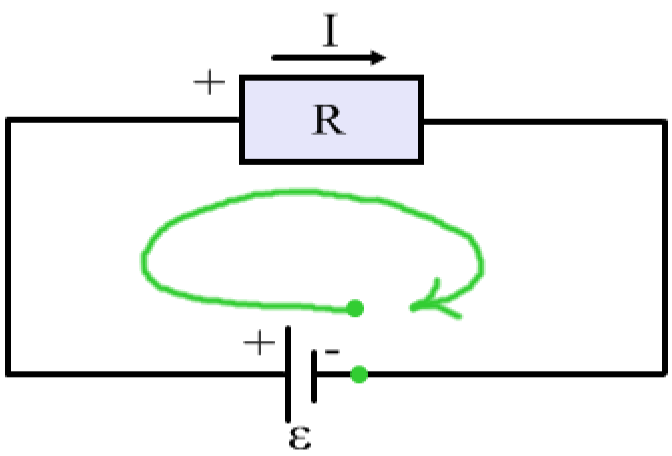
Kirchhoff II. törvénye (hurok törvény)

A stacionárius elektromos tér konzervatív, tehát továbbra is fennáll: $\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$

A térerősség görbe menti integrálja a potenciálkülönbség, tehát egy zárt hurok mentén a potenciálváltozások előjeles összege nulla. Ez Kirchhoff II. törvénye.

$$\sum_{i=1}^{N} U_i = 0$$

<u>A törvény alkalmazása</u>: felveszünk egy körüljárási irányt, és egy áramirányt.



$$\varepsilon - RI = 0$$

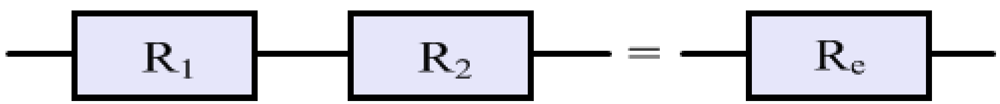
Tehát egy ideális telep és egy ellenállás esetén:

$$\varepsilon = RI$$

Összetett áramkörök

Csomópont: azon pont ahová kettőnél több vezeték fut be
Ág: két vége csomópont, de benne nincs több csomópont

Az egy ágon belüli elemek **sorosan** vannak kapcsolva és rajtuk ugyanakkora áram folyik keresztül.

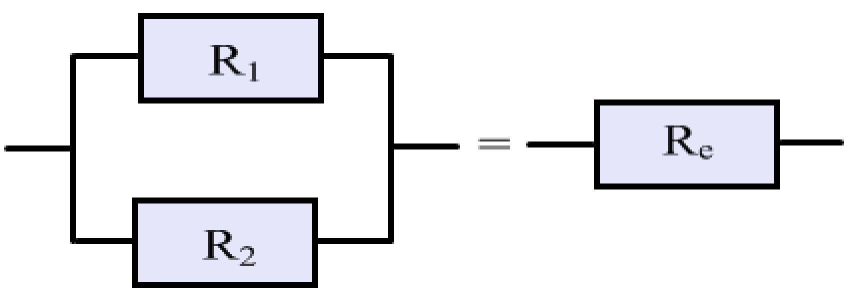


$$U_1 + U_2 = U \qquad I_1 = I_2 = I$$

$$R_1 I + R_2 I = R_e I \quad \rightarrow \quad R_1 + R_2 = R_e$$

Több ellenállásra: $R_e = \sum_{i=1}^{N} R_i$

Párhuzamos kapcsolásnál az elemek megfelelő pólusai azonos potenciálon vannak.



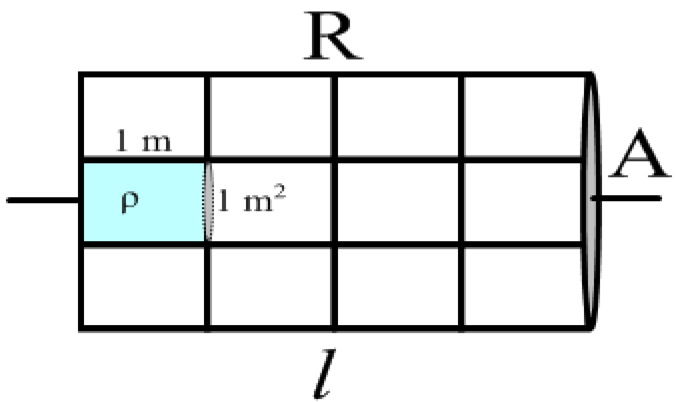
$$U_1 = U_2 = U \qquad I_1 + I_2 = I$$

$$\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = \frac{U}{R_e} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_e}$$

Több ellenállásra: $\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$

Az ellenállás függése a geometriától

Fajlagos ellenállás (ρ): Egységnyi hosszú és egységnyi keresztmetszetű vezető ellenállása.



$$[\rho] = \Omega\mathrm{m} \quad \text{vagy} \quad \frac{\Omega\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$$

kétszeres hossz: mintha sorosan lenne kettő

kétszeres keresztmetszet: …párhuzamosan…

Tehát az ellenállás arányos a hosszal, fordítottan a keresztmetszettel: $R = \rho \dfrac{l}{A}$

A fajlagos ellenállás csak az anyagra jellemző mennyiség.

pl. réz esetén: $\rho = 1{,}72 \cdot 10^{-8}\Omega\mathrm{m}$ (áramkörben elhanyagolható ellenállás)

műanyagokra: $\rho = 10^{15} - 10^{20}\Omega\mathrm{m}$ (szigetelők)

Differenciális Ohm-törvény

Vékony vezetőre vehetjük az áramsűrűséget állandónak és a vezetővel párhuzamosnak.

$$I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = jA$$

A vezető ellenállására így: $R = \frac{U}{I} = \frac{El}{jA}$ illetve $R = \rho \frac{l}{A}$

Innen: $\rho = \frac{E}{j}$ azaz $\rho j = E$ Vektori formában: $\rho \vec{j} = \vec{E}$

Bevezetve a $\sigma = 1/\rho$ fajlagos vezetőképességet a differenciális Ohm-törvény:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Amennyiben egy áramforrás miatt vagy egyéb oknál fogva $\vec{E}^*$ idegen térerősség is jelen van, akkor azt is számításba kell venni!

$$\boxed{\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}^*\right)}$$

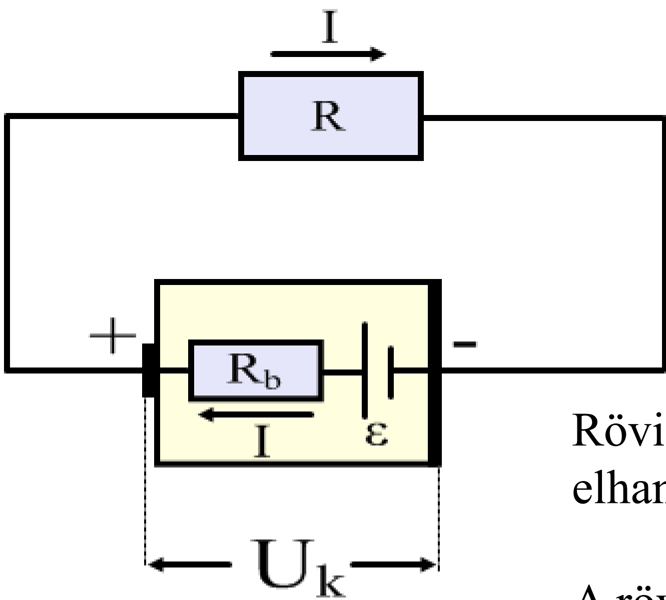
Fémeknél állandó hőmérsékleten jó közelítéssel igaz, de pl. félvezető diódák esetében még állandó hőmérsékletre sem teljesül.

Ha a ρ fajlagos ellenállás és az A keresztmetszet a vezeték mentén változik, akkor az R ellenállás kiszámítása:

$$R = \int_g \rho(s) \frac{ds}{A(s)}$$

a g görbét a vezeték mentén vesszük

Valóságos áramforrás belső ellenállása



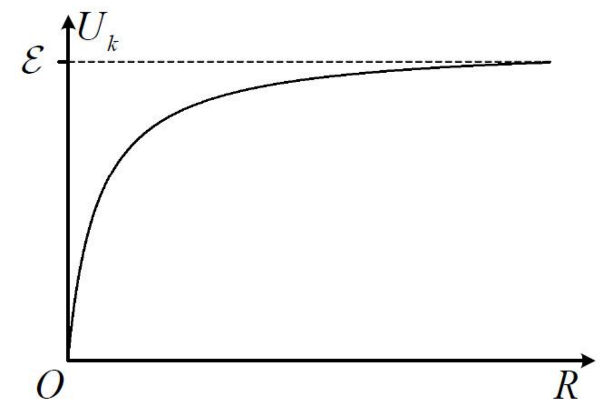
Kirchhoff II. törvényéből:

$$\varepsilon - I(R + R_b) = 0$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R + R_b}$$

Rövidzár, ha a külső fogyasztók (terhelés) ellenállása elhanyagolható: $R \approx 0$

A rövidzárási áram: $I_{\text{röv}} = \dfrac{\varepsilon}{R_b}$



A külső fogyasztókra jutó feszültség a kapocsfeszültség:

$$U_k = IR = \varepsilon - IR_b = \varepsilon \frac{R}{R + R_b}$$

Terheletlen telep esetén (ha $R \to \infty$), a kapocsfeszültség egyenlő az elektromotoros erővel (üresjárási feszültség, U_0):

$$U_k = U_0 = \varepsilon \quad \text{és ekkor} \quad I = 0$$