Dinamika

A dinamika feladata a test(ek) gyorsulását okozó erők matematikai leírása.

Az erők kölcsönhatások során lépnek fel.
Ezek a kölcsönhatások lehetnek:
- test és test között
- mező(erőtér) és test között

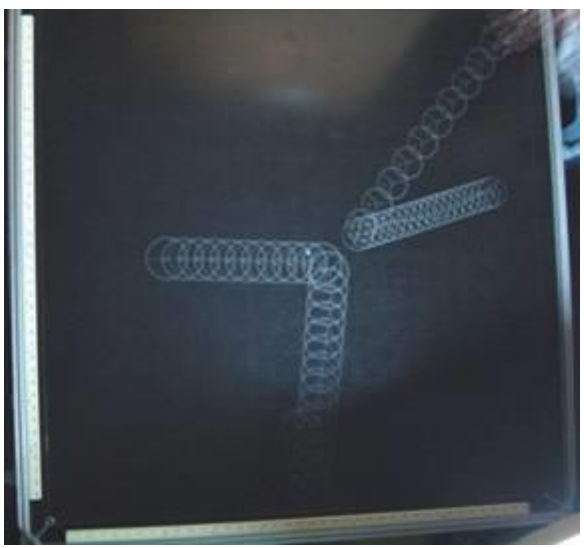
A magára hagyott test egy olyan test, amely nem áll kölcsönhatásban sem más testtel, sem pedig mezővel.

Newton törvényei: I.

Newton I. törvénye: Minden nyugalomban lévő test megtartja nyugalmi állapotát, minden mozgó test pedig egyenes vonalú egyenletes mozgását mindaddig, amíg egy másik test vagy mező annak megváltoztatására nem kényszeríti.

ugyanez kicsit pontosabban megfogalmazva:

Kiválasztási axióma: Létezik olyan vonatkoztatási rendszer amelyben a magára hagyott testek megtartják eredeti mozgásállapotukat (azaz a sebesség vektor állandó). Az ilyen rendszereket **inerciarendszereknek** nevezzük.



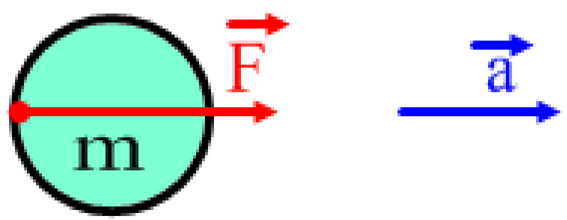
A légpárnás asztalon mozgó korong jó közelítéssel egy magára hagyott testnek számít.
Mozgása az asztalhoz (Föld felszínéhez) képest jó közelítéssel egyenes vonalú egyenletes, tehát a Föld felszínéhez rögzített rendszer jó közelítéssel (mindennapi élet történéseire) inerciarendszer.

Newton törvényei: II.

Ha egy pontszerű testre erő hat az megváltoztatja annak mozgásállapotát (a sebesség vektort). Ekkor a test gyorsul (a gyorsulás vektor nem nulla).

<u>Newton II. törvénye</u>: Egy állandó tömegű pontszerű test gyorsulása arányos a testre ható erővel és ellentétesen arányos a test tömegével. A gyorsulás a testre ható erő irányába mutat.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

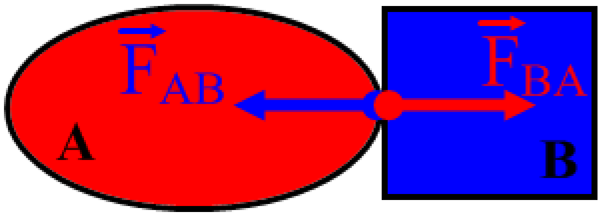


Newton törvényei: III.

Newton III. törvénye: (Hatás-ellenhatás törvénye)
Ha az A test a B testre $\vec{F}_{BA}$ erőt fejt ki, akkor a B test is erőt fejt ki az A testre.

Ez az $\vec{F}_{AB}$ erő azonos nagyságú, de ellentétes irányú az $\vec{F}_{BA}$ erővel.

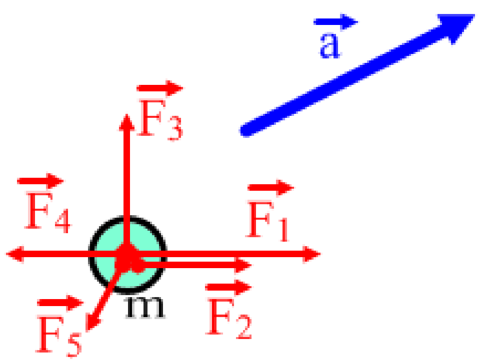
$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

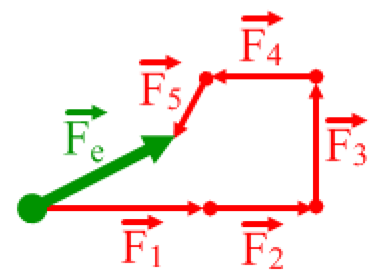


Newton törvényei: IV.

<u>Newton IV. törvénye</u>: (A szuperpozíció elve)
Ha egy tömegpont egyidejűleg több erőhatásnak is ki van téve, akkor azok együttes hatása egy eredő erővel helyettesíthető. Az eredő erő a testre ható összes erő vektori összege:

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad\qquad \vec{a} = \frac{\vec{F}_e}{m}$$



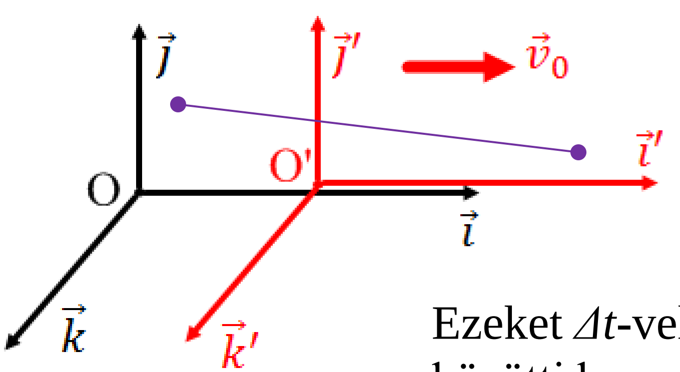


$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^{5} \vec{F}_i$$

A Galilei-féle relativitási elv

Bármely két egymáshoz képest **állandó** sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerben a **mechanikai jelenségek** ugyanúgy mennek végbe.
<u>*Pl.*</u> a rázkódástól eltekintve nem érezzük, hogy mozog-e a vonat, ha állandó sebességgel halad. A leejtett pénzérme ugyanúgy függőlegesen egyenletesen gyorsulva esik.
Az ilyen vonatkoztatási rendszerek közül tehát egyik sincs kitüntetve, nincsen egy abszolút nyugvó vonatkoztatási rendszer.

<u>Egymáshoz képest mozgó rendszerek közötti kapcsolat:</u>
Mozogjon a *K'* rendszer a *K*-hoz képest a pozitív *x* irányba **állandó** v_0 sebességgel.



Egy Δt idő alatt az origók közötti távolság: $\overline{OO'} = v_0 \Delta t$
Tehát a mért koordinátakülönbségek *K'*-ben:

$$\Delta x' = \Delta x - v_0 \Delta t$$
$$\Delta y' = \Delta y$$
$$\Delta z' = \Delta z$$

Továbbá: $\Delta t' = \Delta t$ (órák szinkronban)

Ezeket Δt-vel (ill. Δt') osztva megkapjuk a sebességek közötti kapcsolatot (lila vonal egy mozgó test pályadarabja):

$$v_x' = v_x - v_0$$
$$v_y' = v_y$$
$$v_z' = v_z$$

Ezt vektori formában írva kapunk egy általános érvényű kifejezést:

$$\boxed{\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0}$$

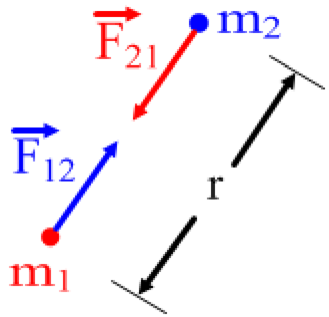
Erőtörvények

Olyan függvények melyek matematikai alakban megadják a testre ható erőket.
Ezeknek a függvényeknek a változói lehetnek:
-a test helye
- a test sebessége
- az idő

Newton-féle gravitációs erő

Két tömegpont közötti erő arányos a két tömeg szorzatával és fordítottan arányos a távolságuk négyzetével.

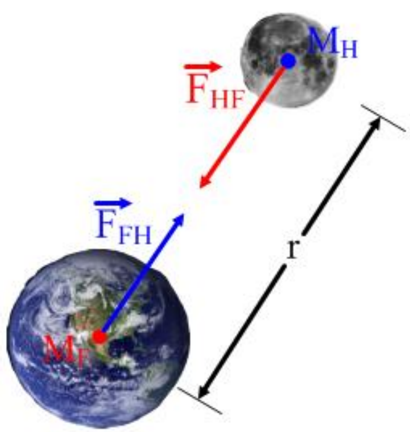
$$F = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}$$



A kölcsönhatás mindig vonzó.

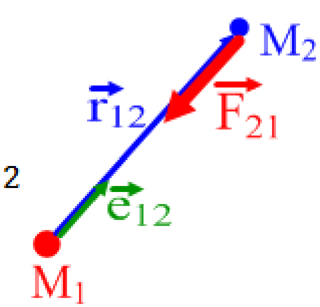
Az arányossági tényező az univerzális gravitációs állandó: $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$

Az erőtörvény egyszerű alakja kiterjedt testekre is érvényes, amennyiben gömbszimmetrikusok.
A távolság a középpontok között mérendő.



A vektori alak megadja az erő irányát is:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{\gamma M_1 M_2}{r^2{}_{12}} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = -\frac{\gamma M_1 M_2}{r^2} \vec{e}_{12}$$



Súlyerő

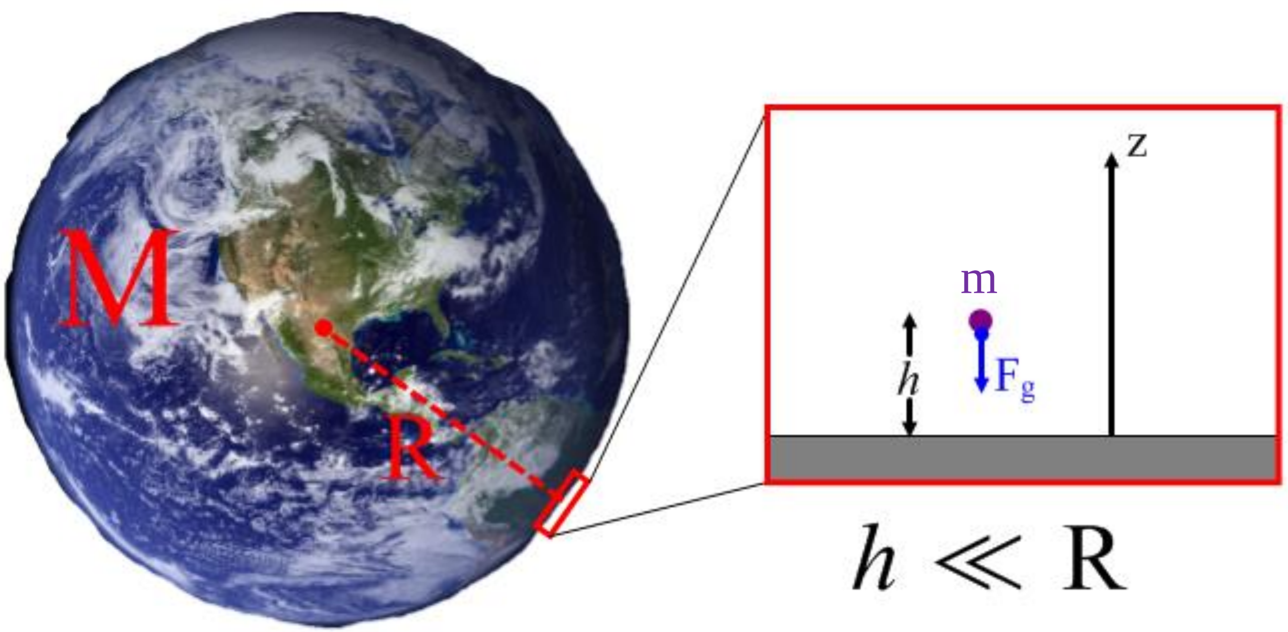
Amikor a test elmozdulása elhanyagolható méretű a bolygó (vagy hold stb.) sugarához képest, akkor a gravitációs erő homogénnek (helytől független) vehető.

Pl. a Földünk felszínének közelében végbemenő mozgásokra az általános Newton-féle erőtörvényből kapjuk:

$$\vec{F}_g = -\frac{\gamma M m}{r^2}\vec{e}_r = -\frac{\gamma M m}{(R+h)^2}\vec{e}_r \approx -\frac{\gamma M m}{R^2}\vec{e}_r = -mg\vec{k}$$

$$g = \frac{\gamma M}{R^2} = 9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

gravitációs gyorsulás a Föld felszínén

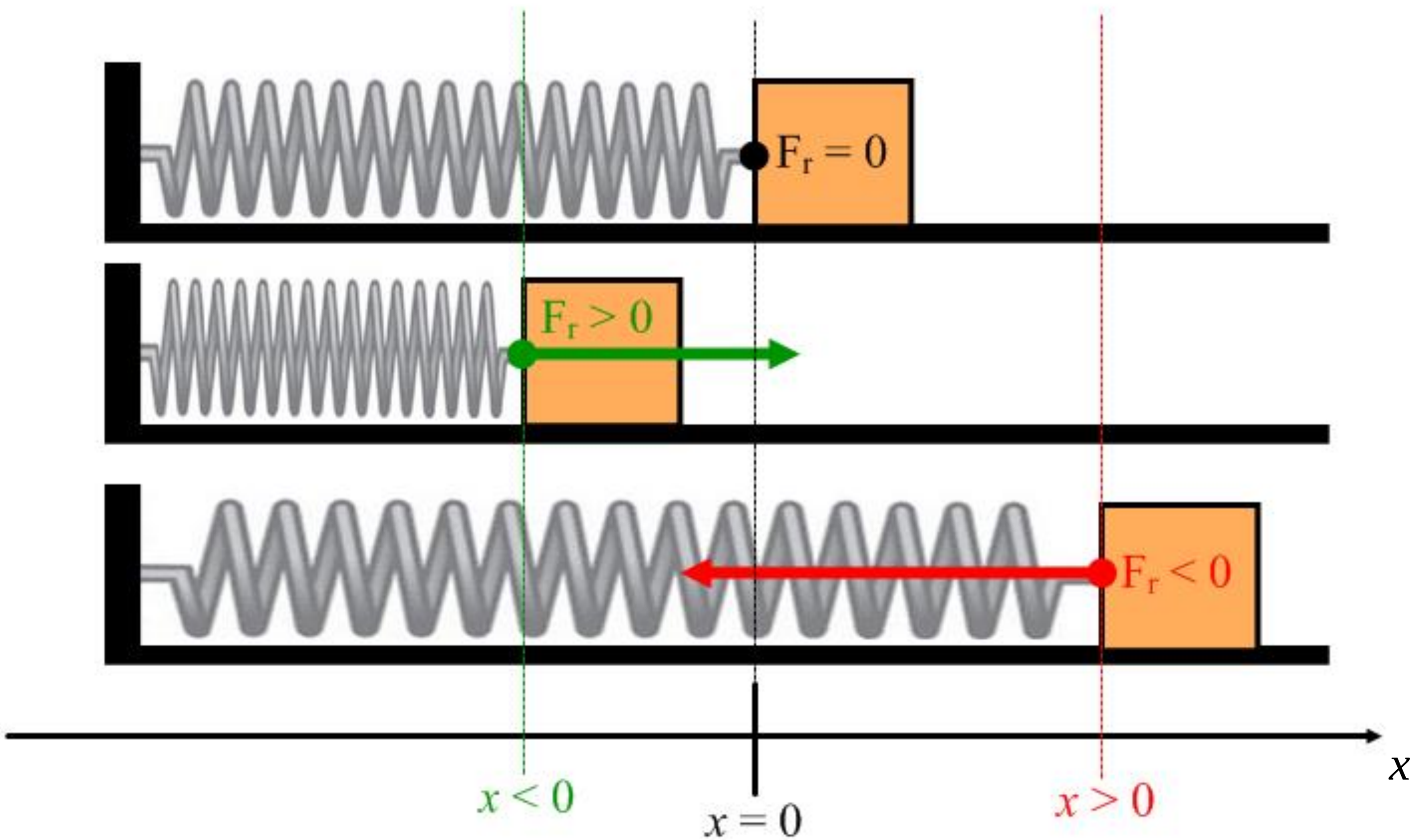


Rugóerő

Hooke-törvény: Az erő az egyensúlyi helyzettől mért deformáció méretével arányos és azzal ellentétes irányú.

Az arányossági tényező a rugóállandó *D*.

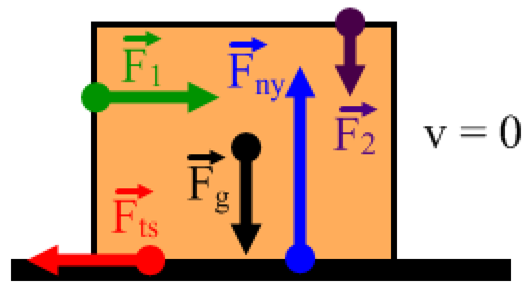
$$F_r = -Dx$$



Súrlódási erő

<u>Három fajta lehet</u>:

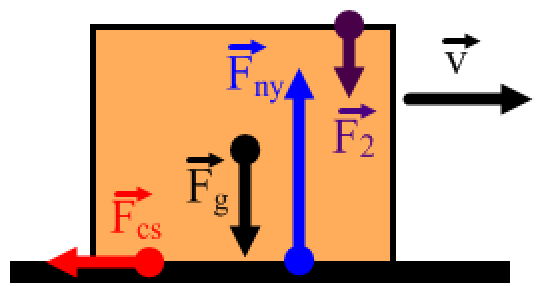
1. **tapadási**: A két felület egymáshoz képesti mozdulatlanságát igyekszik megőrizni. Értéke **bármekkora** lehet egy bizonyos **maximális** értékig (míg meg nem csúszik).



$$F_{ts} = F_1$$
amíg
$$F_1 \leq F_{ts,max}$$
$$F_{ts,max} = \mu_t F_{ny}$$

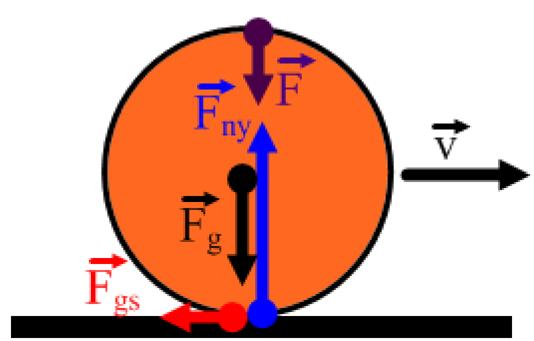
$\mu_t > \mu_{cs}$ mindig

2. **csúszási**: Két egymáson csúszó felület között fellépő erő, mely a mozgást igyekszik gátolni. Csak az anyagi minőségtől (μ) és a felületeket összenyomó erőtől függ.



$$F_{cs} = \mu_{cs} F_{ny}$$

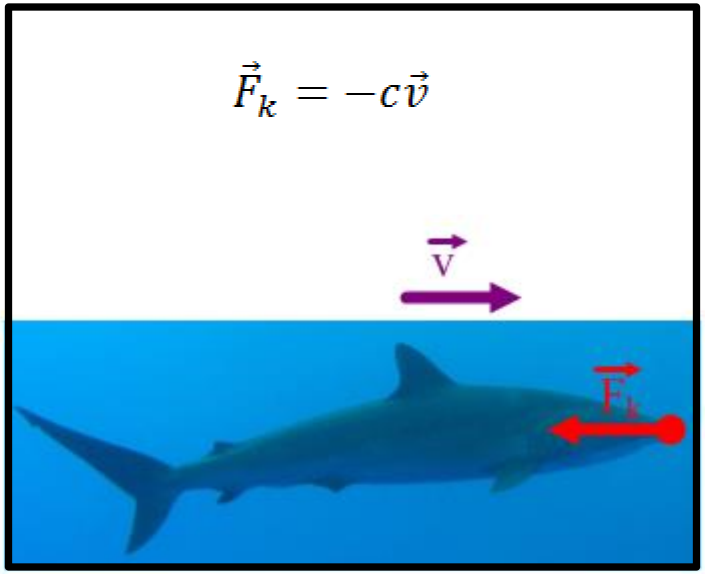
3. **gördülési**: Felületen guruló testre hat a mozgással ellenkező irányban.
(pl. emiatt áll meg a guruló billiárd vagy teke golyó)

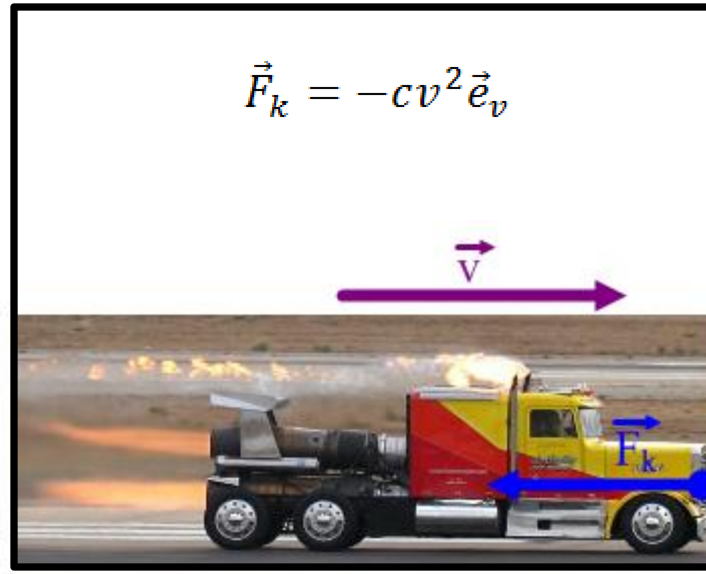


$$F_{gs} = \mu_g F_{ny}$$

Közegellenállás vagy légellenállás

Arányos a test sebességével, ill. a sebesség négyzetével, és azzal ellentétes irányú.

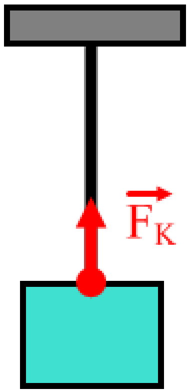




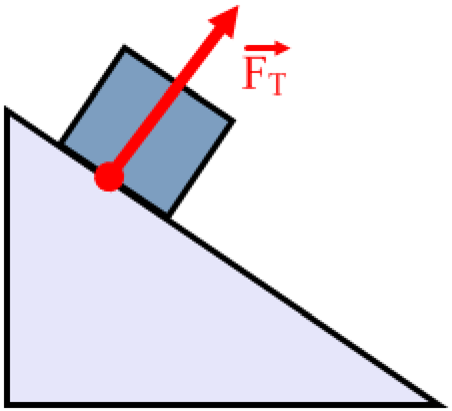
Az arányossági tényező *c* függ:
- a test mozgásra merőleges felületének nagyságától
- a test alakjától (mennyire áramvonalas)
- a közeg sűrűségétől

Kényszererők

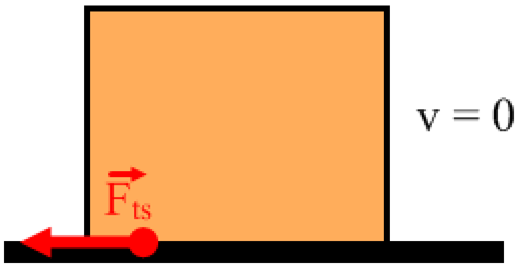
Ezek nagysága éppen akkora, hogy a **kényszerfeltétel** teljesüljön:
pl. kötélerő, tartóerő, tapadási súrlódás (a megcsúszás határáig)



kötél nem nyúlik



nem mehet bele a lejtőbe



ne csússzon meg

A dinamika alapegyenlete

Ha összegezzük Newton I., II., és IV. törvényét, akkor megkapjuk a **dinamika alapegyenletét**:

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}$$

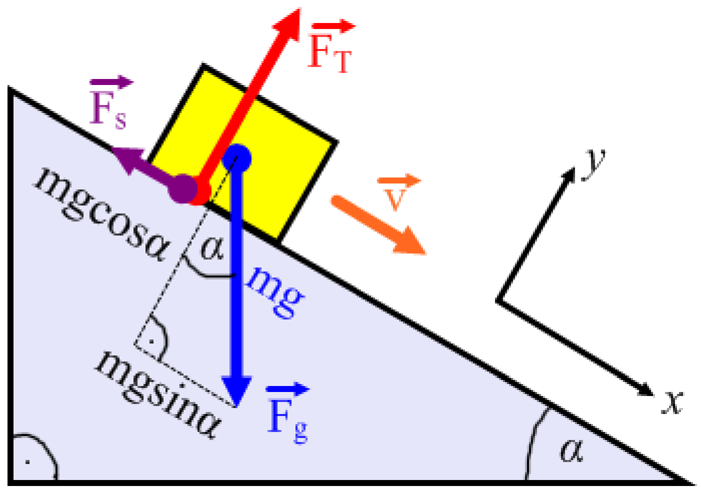
Ezeket koordinátánként kiírva, illetve az erőkre beírva a megfelelő erőtörvényeket, megkapjuk a **mozgásegyenleteket**. Pl. derékszögű Descartes koordinátarendszerben:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{ex}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} &= F_{ey}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} &= F_{ez}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{aligned}\right\} \quad \text{másodrendű, csatolt differenciálegyenletek}$$

Az erők nem függhetnek a gyorsulástól, mert az ellentmondana a szuperpozíció elvének.
A megoldáshoz meg kell még adni 6 integrálási állandót. Ezek általában a **kezdeti hely** 3 koordinátája és a **kezdeti sebesség** 3 koordinátája: $\vec{r}_0$ és $\vec{v}_0$
Az egyenleteket megoldva megkapjuk a **mozgástörvényt**, mely megmondja, hogy a test hol tartózkodik egy bizonyos időben (a pálya egyenlete): $\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$

Példa: Lejtőn mozgó test

Alkalmazva a dinamika alapegyenletét: $m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_g + \vec{F}_T + \vec{F}_s$



Célszerű párhuzamos és merőleges komponenseket vizsgálni, mert tudjuk, hogy az *y* irányú eredő erőnek zérusnak kell lennie:

$$(x) \quad m\ddot{x} = ma_x = mgsin\alpha - F_s$$
$$(y) \quad m\ddot{y} = ma_y = 0 = F_T - mgcos\alpha$$

Mivel a tartóerő egyben a nyomóerő is:

$$F_s = \mu mgcos\alpha$$

Beírva az *(x)* egyenletbe a súrlódást:

$$ma_x = mgsin\alpha - \mu mgcos\alpha$$
$$a_x = g(sin\alpha - \mu cos\alpha)$$

Ha $a_x < 0$ jön ki megoldásnak:
- a lefelé csúszó test lassul

Lejtőre helyezett test egyensúlyának feltétele:
- a nulla eredő erőhöz szükséges tapadási súrlódási erőnek kisebbnek kell lennie, mint a lehetséges maximális érték ($\mu_t F_T$)