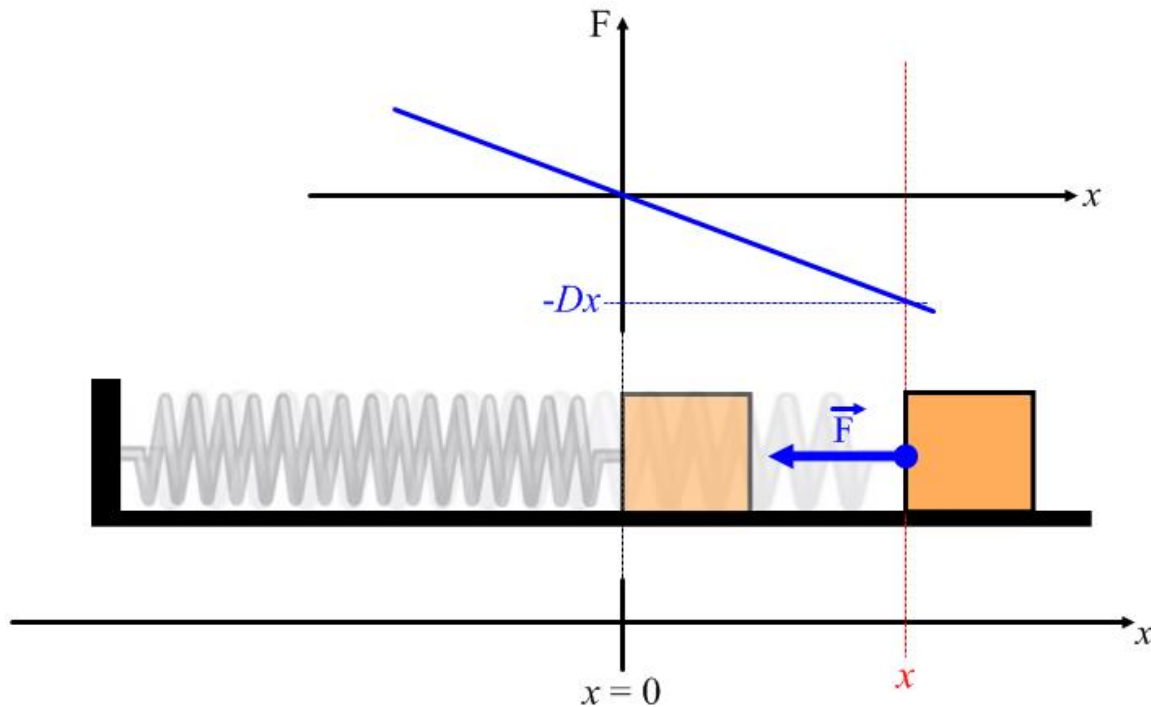


Harmonikus rezgőmozgás mozgásegyenlete

Harmónikus rezgés: Feltétele, hogy a testre ható erő harmonikus legyen: $F_x = -Dx$ (Hooke-törvény). Tehát pl. egy rúgóra akasztott test (ha minden más erő elhanyagolható).



Felírva a mozgásegyenletet:

$$ma_x = -Dx$$

$$m\ddot{x} = -Dx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{D}{m}x$$

Általános megoldás
(mozgástörvény):

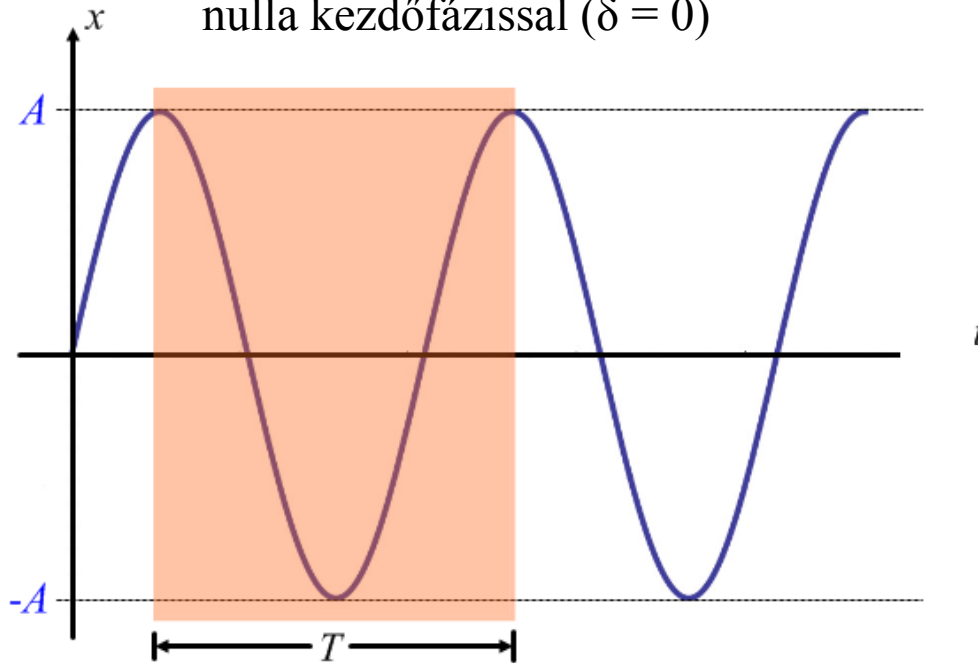
$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$$

kezdeti feltételek határozzák meg őket

- A: amplitúdó (maximális kitérés)
- δ : kezdőfázis
- ω : körfrekvencia (lásd később)

Harmonikus rezgőmozgás mozgástörvénye

Szinuszos harmonikus rezgőmozgás,
nulla kezdőfázissal ($\delta = 0$)



$$x(t) = x(t + T)$$

$$\omega(t + T) = \omega t + 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{körfrekvencia}$$

$$\omega = 2\pi f$$

A kitérés-idő függvény:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$$

Ezt deriválva kapjuk a
sebességet:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \delta)$$

A sebesség deriváltja pedig a
gyorsulás:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta)$$

Felhasználhatjuk: $x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$

Tehát a gyorsulásra: $a_x(t) = -\omega^2 x$

Mozgásegyenletben volt: $a_x = -\frac{D}{m}x$

$$\text{Tehát: } \omega^2 = \frac{D}{m}$$

Kinetikus és potenciális energia

Kinetikus energia: A sebesség-idő függvényt felhasználva ($\delta = 0$)

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t)$$

Potenciális energia: A kitérés-idő függvényt felhasználva ($\delta = 0$) – rugalmas erőter

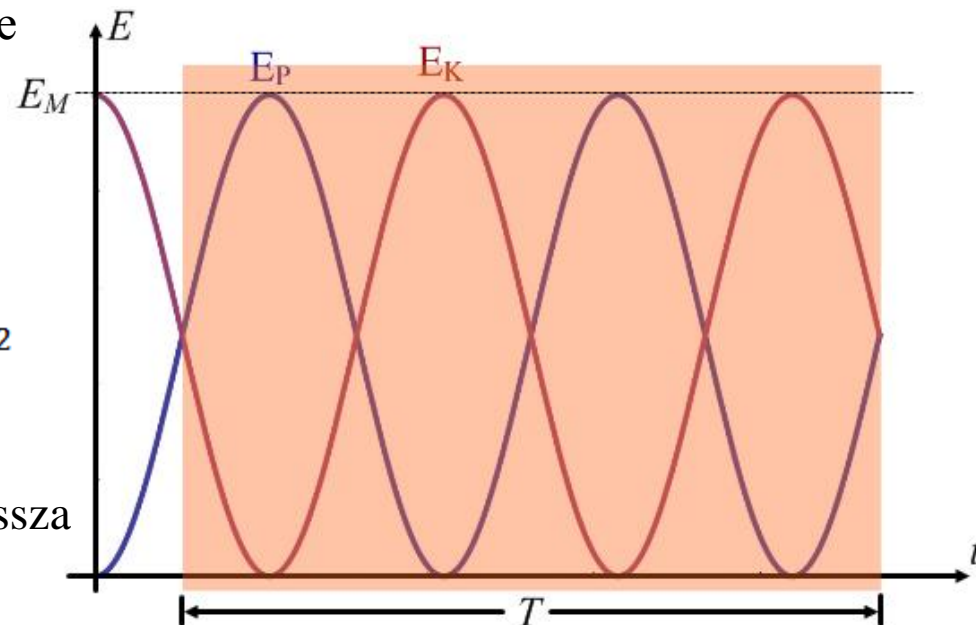
$$E_P = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t)$$

Mechanikai energia:

A potenciális és a kinetikus energia összege

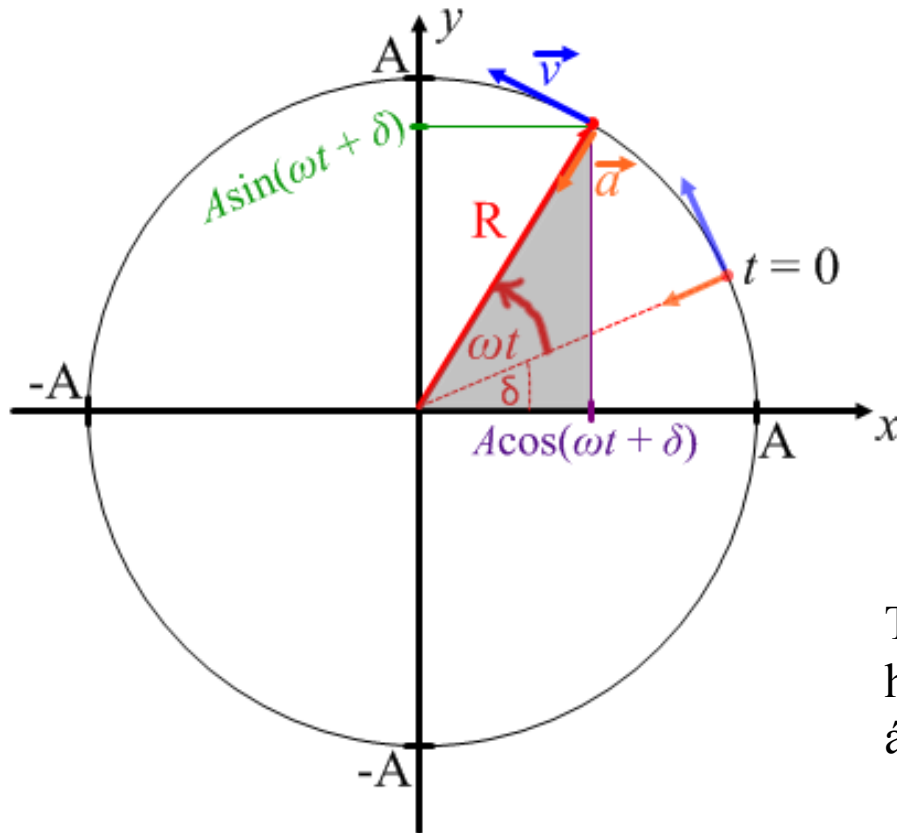
$$\begin{aligned} E_M &= E_K + E_P \\ &= \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t) \\ &= \frac{1}{2}DA^2[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)] = \frac{1}{2}DA^2 \end{aligned}$$

A potenciális és a kinetikus energia oda-vissza egymásba alakul a mozgás során.



Egyenletes körmozgás és harmonikus rezgés

Körmozgás esetén mindkét koordináta harmonikus rezgőmozgást végez.



T : keringési vagy periódusidő

ω : szögsebesség vagy körfrekvencia

Felhasználva a kapcsolatot:

$$R = A$$

$$v_{ker} = R\omega = A\omega = v_{max}$$

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \omega^2 A = a_{max}$$

Tehát a körmozgás két egymásra merőleges harmonikus rezgőmozgás összetevéseként áll elő:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \delta)$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta) = A \sin\left(\omega t + \delta + \frac{\pi}{2}\right)$$

Hogy körmozgás legyen az eredmény, frekvenciák és amplitúdók meg kell egyezzenek, fáziskülönbség pedig $\pi/2$ kell legyen. **SZIMULÁCIÓ!**

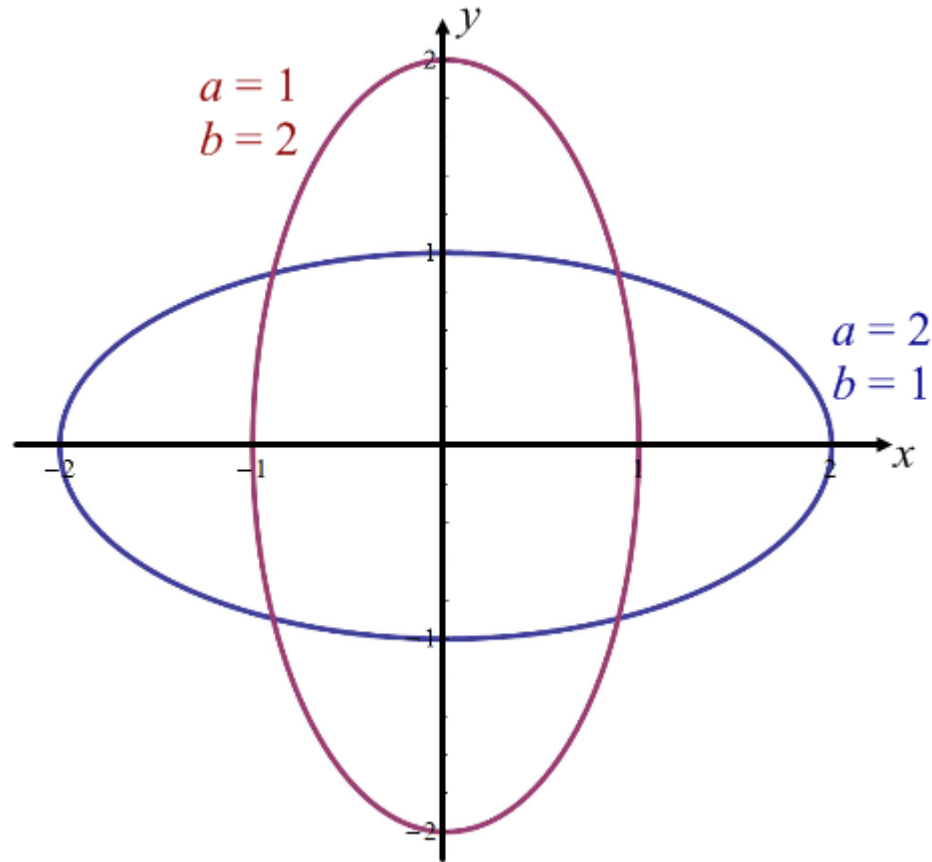
Merőleges rezgések összetevése (többi eset)

Eltérő amplitúdók, $\pi/2$ fáziskülönbség

A két merőleges kitérésre:
$$\left. \begin{array}{l} x(t) = a \cos(\omega t) \\ y(t) = b \sin(\omega t) \end{array} \right\} \frac{x}{a} = \cos(\omega t) \text{ és } \frac{y}{b} = \sin(\omega t)$$

Tehát:
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

frekvenciák azonosak

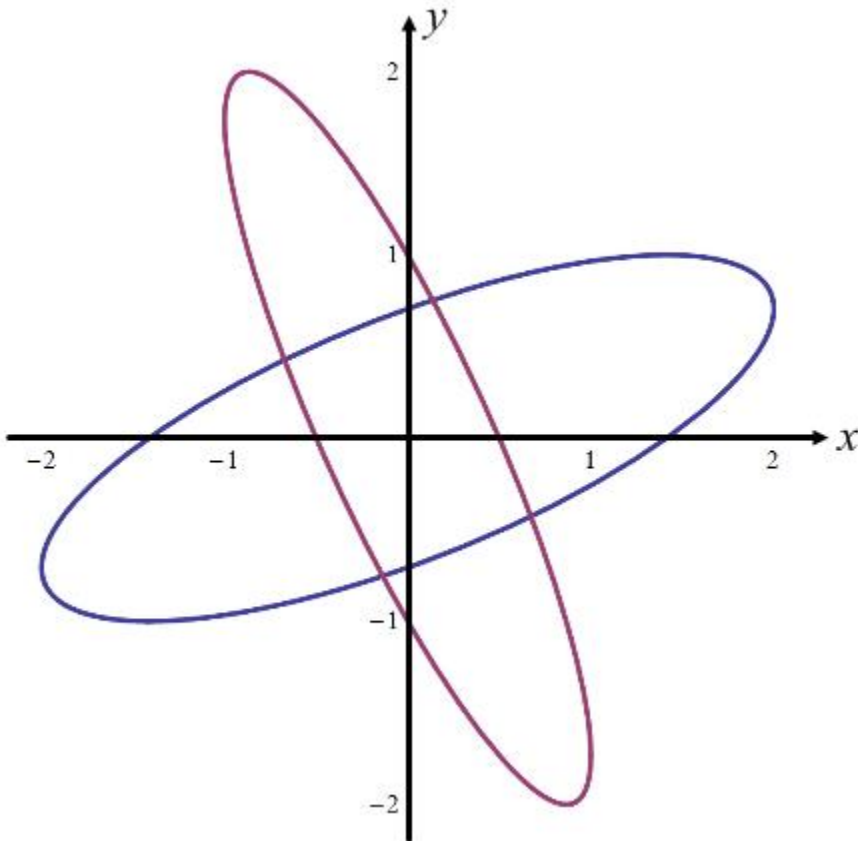


Tetszőleges fáziseltérés

Abban az esetben, ha a frekvenciák azonosak, az amplitúdók nem, és a fáziseltérés bármi:
A mozgás továbbra is **ellipszis** alakú:

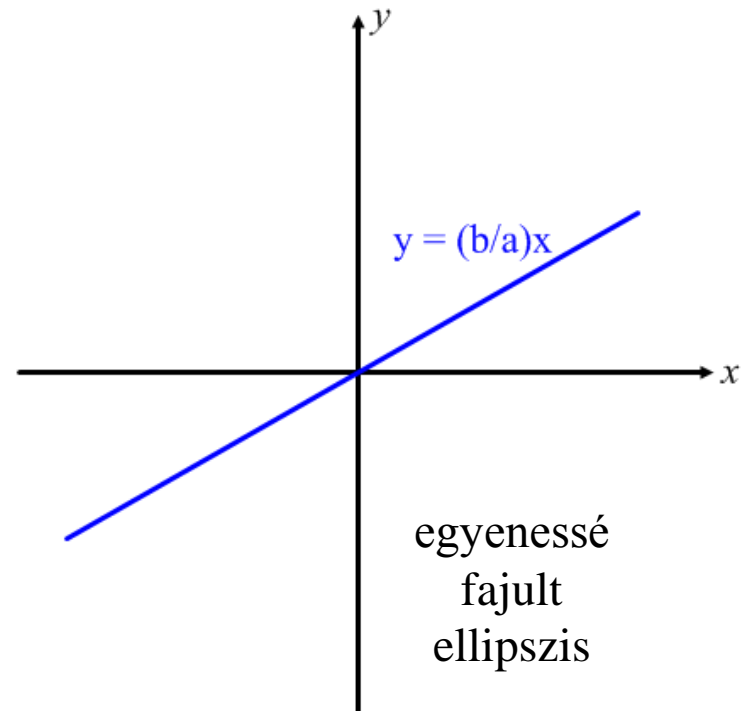
viszont torzul és elfordul

$-5\pi/6$ illetve $-\pi/4$ fáziskülönbség



másik speciális eset: 0 fáziskülönbség
(vagy π)

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = a \sin(\omega t) \\ y(t) = b \sin(\omega t) \end{array} \right\} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \rightarrow y = \frac{b}{a} x$$



Lissajous-görbék

Teljesen általános eset: A frekvenciák sem egyeznek meg.

A mozgás **periodikus**, ha a frekvenciák aránya **racionális**

pl. $1/2$ vagy $1/3$

(y : $-\pi/2$ fáziskülönbség)

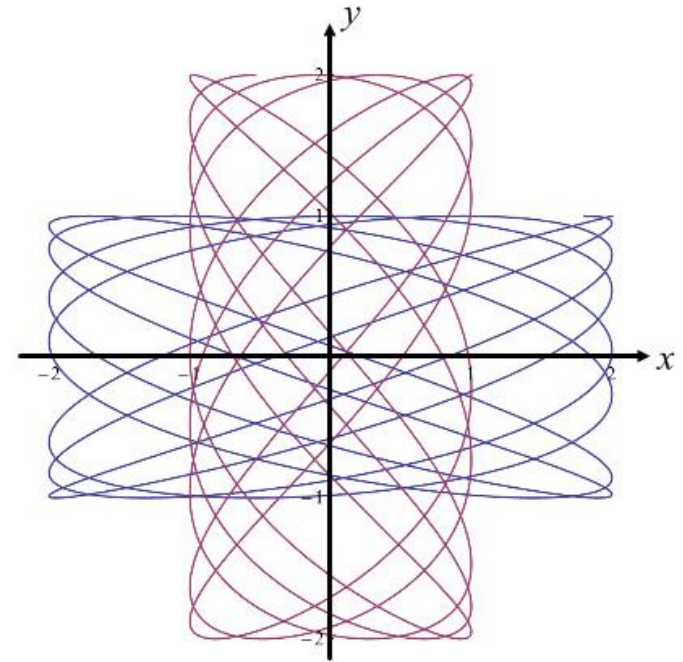
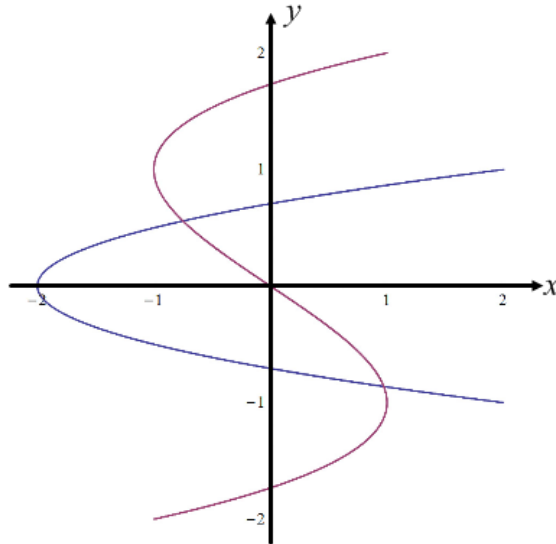
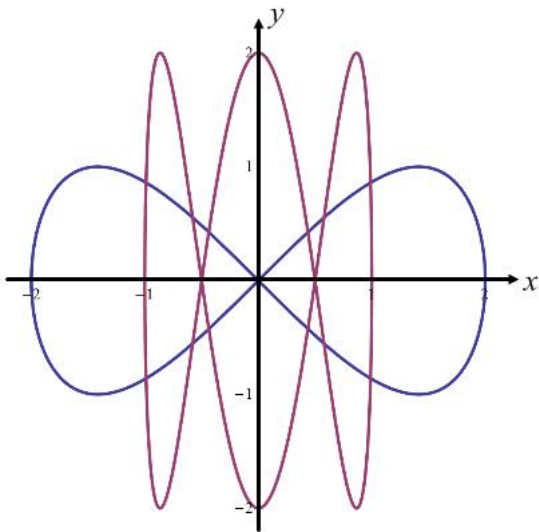
2 vagy 3

(0 fáziskülönbség)

Ha a frekvenciák aránya irracionális, akkor soha nem zárul a görbe, a mozgás nem periodikus (ismétlődő). pl.

(0 fáziskülönbség)

$\sqrt{2}$ és $\sqrt{3}$



a pálya ismétlődő görbét alkot
a periódusidők legkisebb közös többszöröse múlva

SZIMULÁCIÓ!

a pálya sohasem ismétlődik
(teljesen besatírozná...)