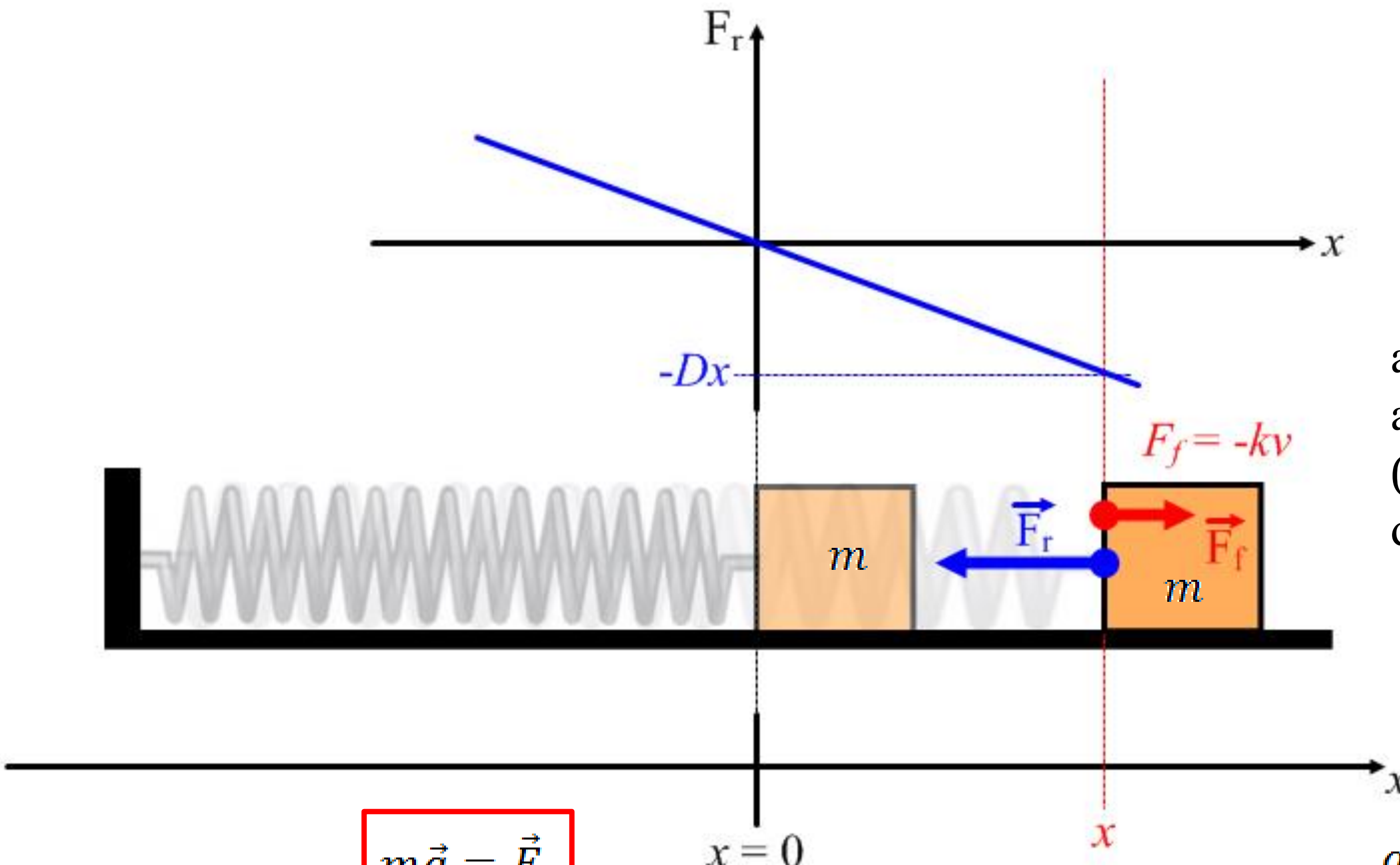
Csillapított rezgés

Csillapított rezgés: A valóságban a rezgések lassan vagy gyorsan, de csillapodnak.
A rugalmas erőn kívül, még egy sebességgel arányos fékező erőt figyelembe véve:



a fékező erő miatt
a mozgás energiája
(mechanikai energia)
disszipálódik.

kváziperiódikus
mozgás

$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}_e}$

$a = \ddot{x}$ $\qquad v = \dot{x}$

A mozgásegyenlet (egyenes vonalú mozgás *x* mentén): $m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$

Csillapított rezgés mozgástörvénye

Kiindulva a mozgásegyenletből : $m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$

$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0$ $\qquad \frac{D}{m} = \omega_0{}^2$ $\quad \omega_0$ - a csillapítatlan rezgés körfrekvenciája (lenne!)

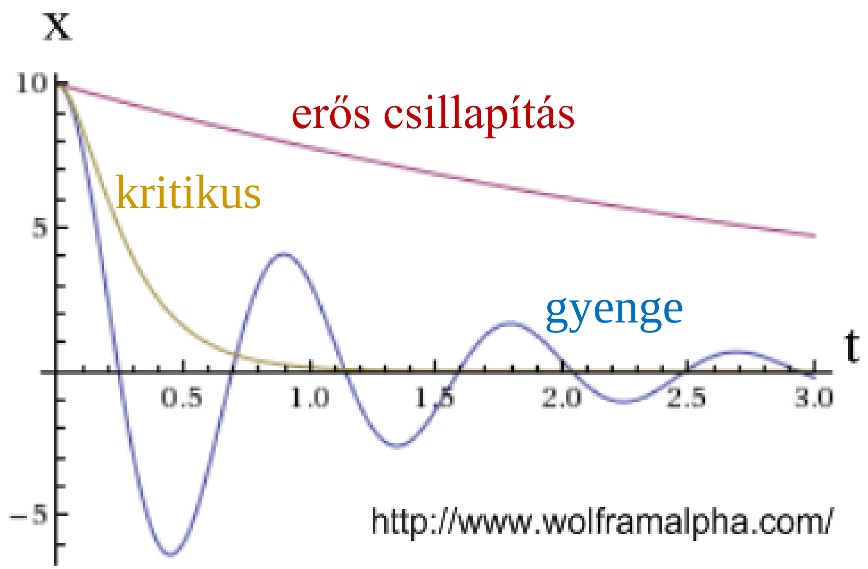
$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0{}^2 x = 0$ $\qquad \alpha = \frac{k}{2m}$ $\quad \alpha$ - a csillapítási tényező

Homogén, lineáris, másodrendű differenciálegyenlet. Megoldás exponenciális: $x = e^{\lambda t}$

Behelyettesítve: $\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\alpha\lambda e^{\lambda t} + \omega_0{}^2 e^{\lambda t} = 0$ és $e^{\lambda t} \neq 0$

Egyszerűsítve kapjuk a karakterisztikus egyenletet: $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0{}^2 = 0$

Megoldásai: $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0{}^2}$



Három lehetséges eset

1. gyenge csillapítás: $\alpha^2 - \omega_0{}^2 < 0$

2. kritikus csillapítás: $\alpha^2 - \omega_0{}^2 = 0$

3. erős csillapítás: $\alpha^2 - \omega_0{}^2 > 0$

Gyengén csillapított rezgés

$\alpha^2 - {\omega_0}^2 < 0$

A negatív diszkriminánst átalakítva:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - {\omega_0}^2} = -\alpha \pm i\sqrt{{\omega_0}^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\omega$$

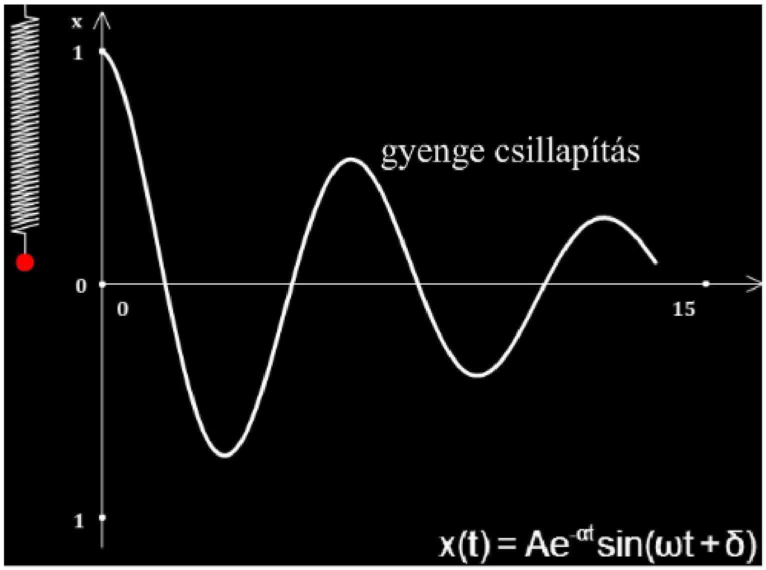
A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$x(t) = Ce^{-\alpha t}\sin(\omega t + \delta)$$

Ezt deriválva kapjuk a sebesség általános alakját:

$$v(t) = -\alpha Ce^{-\alpha t}\sin(\omega t + \delta) + \omega Ce^{-\alpha t}\cos(\omega t + \delta)$$

ANIMÁCIÓ!



A ***C*** és **δ** konstansokat a **határfeltételekből** lehet meghatározni.
Pl. $x(0)$ és $v(0)$ megadható, és
a két egyenletet megoldva
a konstansok kiszámolhatók.

Kényszerrezgés

Egy periodikus erő pótolja a disszipált energiát:

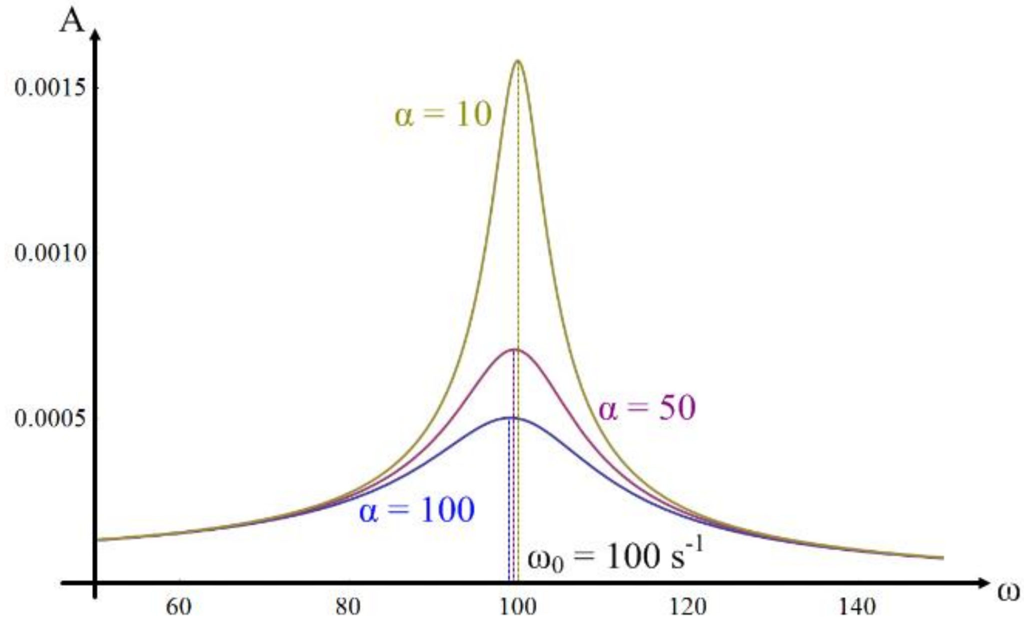
$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} + F_0 \sin(\omega t)$$

Megoldás: egy időben lecsengő (előzőhöz hasonlóan) rezgés, és egy állandósuló rezgés a gerjesztő frekvencián.
Tehát hosszabb idő múlva a mozgástörvény:

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \sin(\omega t - \delta) \qquad \frac{D}{m} = {\omega_0}^2$$

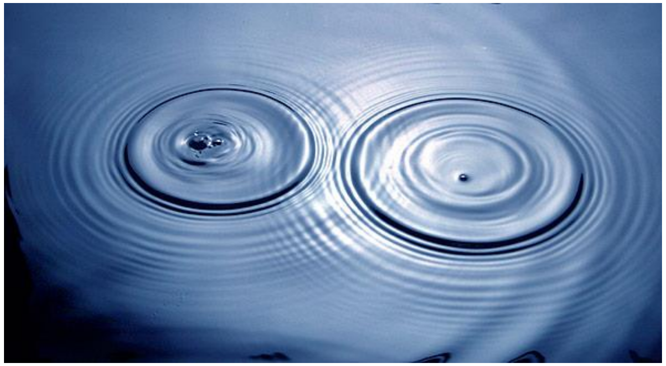
ω_0 - sajátfrekvencia
δ - fáziskésés

<ins>Rezonancia</ins>: Az az ω_r körfrekvencia, amire a rezgés amplitúdója a lehető legnagyobb.
Ha a csillapítás gyenge (α kicsi), akkor $\omega_r \approx \omega_0$ és az amplitúdó minden határon túl nőhet (amíg a rendszer szét nem esik…) – rezonancia katasztrófa.



Hullámok

Hullámok akkor jönnek létre amikor egy rugalmas közegben a közeg egy részének rezgése tovaterjed a közegben, azáltal, hogy a szomszédos pontok is átveszik a rezgést.
Pl. víz felülete



A tovaterjedés sebessége a hullám **fázissebessége** (c).
Ez határozza meg milyen időkésés van a két távoli pont rezgése között.
Tekintsünk egy x irányban terjedő síkhullámot (vagy egy 1 dimenziós húron terjedő hullámot).
A rezgés az $x = 0$ helyen a szokásos harmonikus függvény: $y(t) = A\sin(\omega t)$
Ehhez képest az x helyen a rezgés x/c idővel késik:

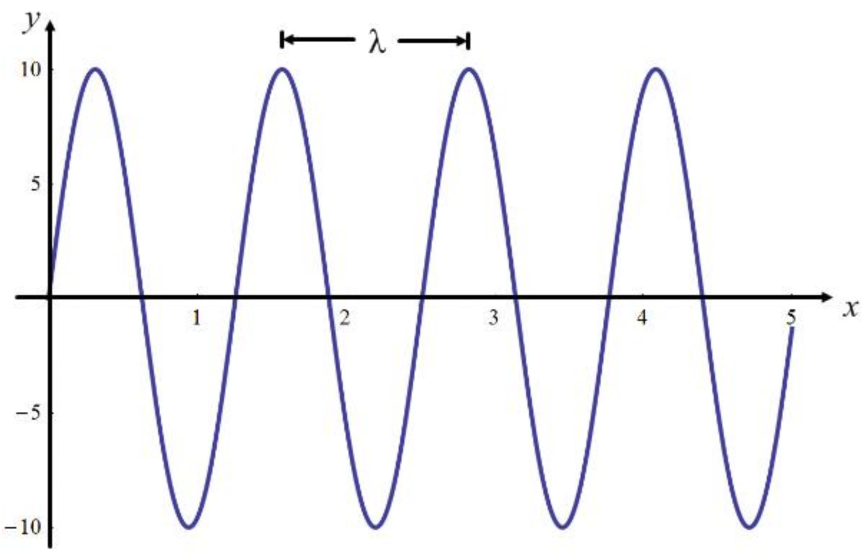
$$y(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] = A\sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right)$$

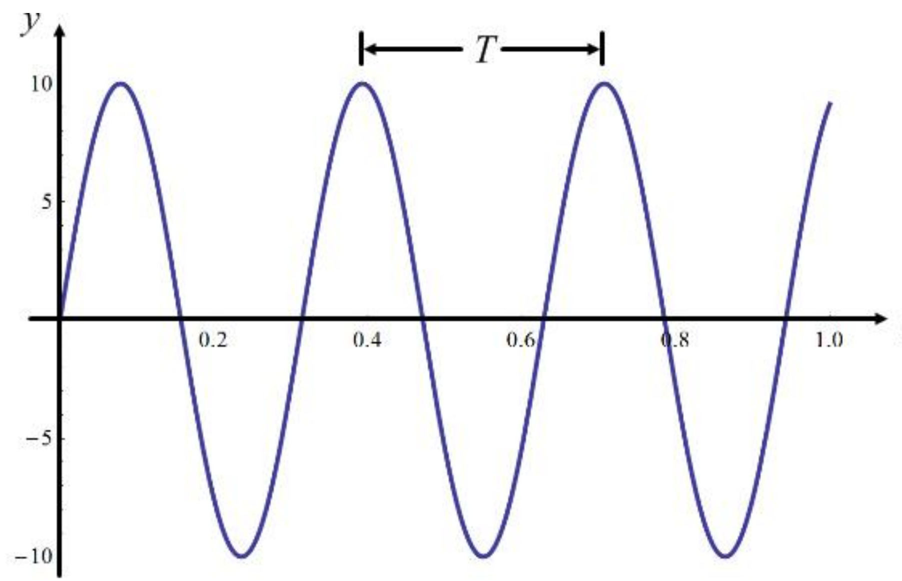
$$= A\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{Tc}\right) = A\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = A\sin(\omega t - kx)$$

T: a rezgés **periódusideje** ω: a rezgés **körfrekvenciája** $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$
λ: a **hullámhossz** (periódusidő alatt megtett út) $\lambda = Tc$
k: **körhullámszám** $k = 2\pi/\lambda$ Mivel: $T = 1/f$ ezért $\boxed{c = \lambda f}$

Hullámok: hely és időfüggés

A hullám esetében a hely és időfüggés is periodikus függvény: $y(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$

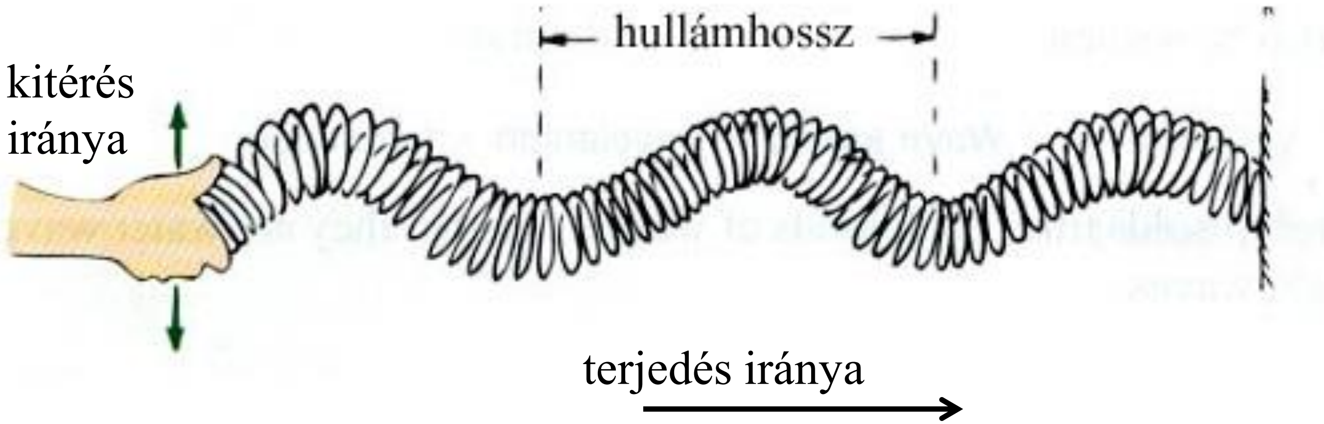




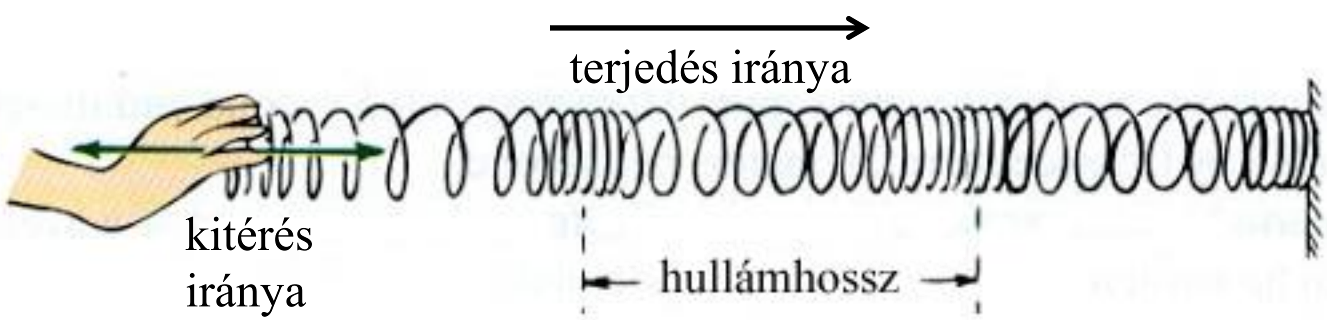
A térbeli periodicitás a hullámhossz
(adott időbeli pillanatkép)

Az időbeli periodicitás a periódusidő
(adott helyen vizsgált rezgés időfüggése)

Transzverzális és longitudinális hullámok



transzverzális hullám:
a kitérés merőleges
a terjedési irányra



longitudinális hullám:
a kitérés párhuzamos
a terjedési iránnyal

a hang is
longitudinális
hullám
(20Hz – 20kHz)

Állóhullámok

Közeghatárhoz érve a hullám visszaverődik. Amikor a bejövő és a visszaverődő hullám találkozik kitéréseik előjelesen összeadódnak (**interferálnak**). Bizonyos esetben **állóhullám** jöhet létre.

Vegyünk egy *x* irányba haladó hullámot, és a –*x* irányba haladó visszavert hullámot:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

ANIMÁCIÓ!

$$y(x,t) = A\sin(\omega t - kx) + A\sin(\omega t + kx)$$

$$y(x,t) = A\sin(\omega t)\cos(kx) - A\cos(\omega t)\sin(kx) + A\sin(\omega t)\cos(kx) + A\cos(\omega t)\sin(kx)$$

$$y(x,t) = 2A\sin(\omega t)\cos(kx) = 2A\cos(kx)\sin(\omega t) = 2A(x)\sin(\omega t)$$

Az amplitúdó helyfüggővé válik: **csomópontok** és **duzzadóhelyek**.

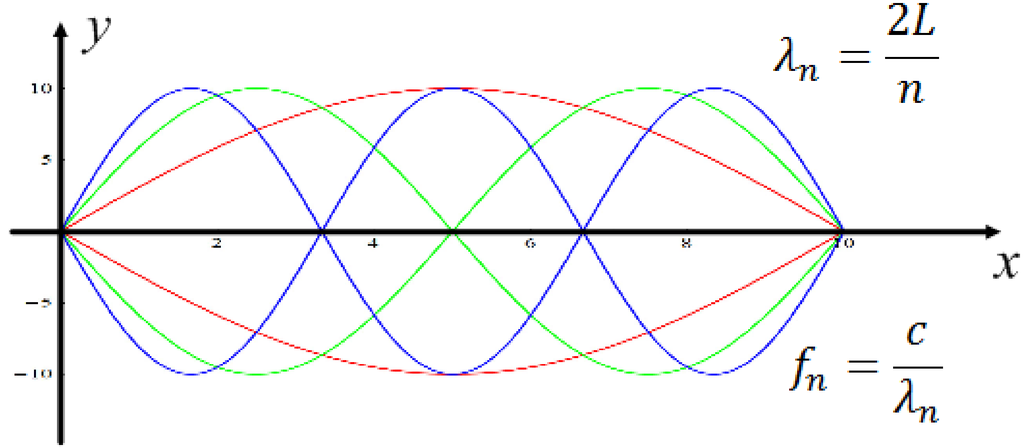
A fázis viszont már nem függ a helytől (hely és időfüggés szétcsatolódik).

Az állóhullám hullámhossza csak az adott geometria által megengedett hullámhosszak lehetnek:

határfeltételek

Pl. rögzített végű húr végén csomópont, nyitott végű síp végében duzzadóhely

Emiatt a frekvencia sem lehet tetszőleges: alaphang és harmonikusok

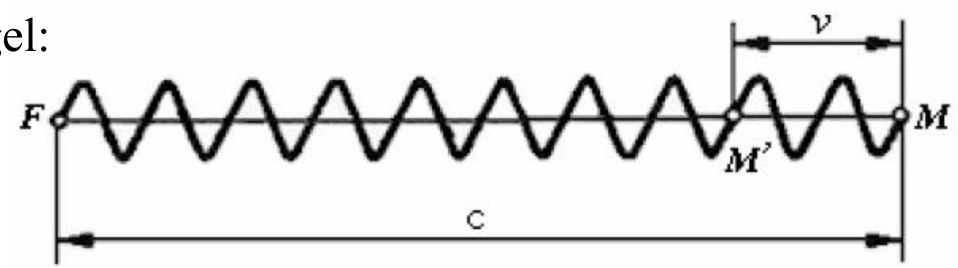


$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n}$$

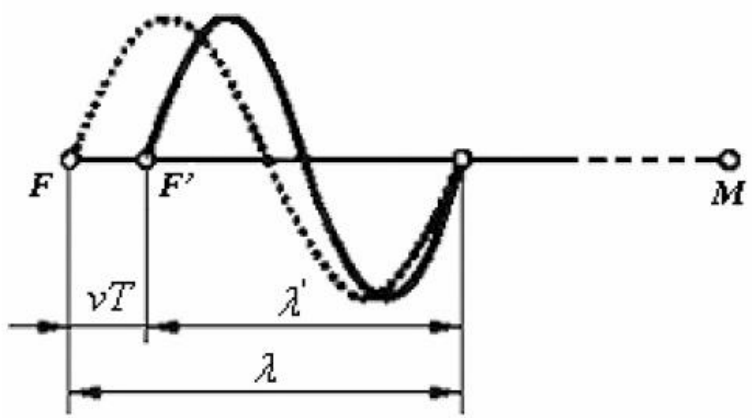
Doppler effektus

Ha a hullám forrása és a megfigyelő egymáshoz képest mozog, akkor a kibocsátott frekvencia nem egyezik meg az észlelt frekvenciával.
Pl. közeledő és távolodó sziréna hangja
Ha az *M* **megfigyelő közeledik** *v* sebességgel:
Nem csak *ct* hosszúságú hullámsort észlel, hanem *ct* + *vt* hosszúságút.
Egységnyi idő alatt észlelt rezgések száma:



$$f' = \frac{ct \pm vt}{\lambda t} = f\left(1 \pm \frac{v}{c}\right)$$ (-*v*/*c* ha távolodik)

Ha az *F* **forrás közeledik** *v* sebességgel.
A hullámhossz *vT* –vel megrövidülni látszik:



$$\lambda' = \lambda - vT$$

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda \mp vT} = \frac{c}{\lambda}\frac{1}{1 \mp \frac{vT}{\lambda}} = f\,\frac{1}{1 \mp \frac{v}{c}}$$

(+*v*/*c* ha távolodik)

Ha mindkettő mozog **a közeghez képest**: $f' = f\,\frac{1 \pm \frac{v_M}{c}}{1 \mp \frac{v_F}{c}}$