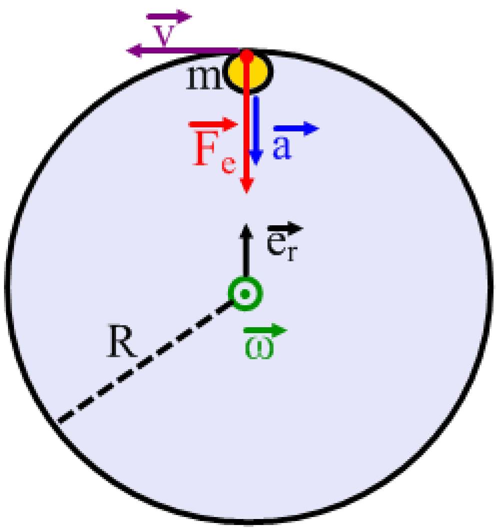
Egyenletes körmozgás dinamikája

<u>Egyenletes körmozgás:</u> A mozgás során a sebesség nagysága állandó, iránya viszont folyamatosan változik. Tehát van gyorsulás, ami a középpont felé mutat (**centripetális**). Ennek feltétele, hogy az eredő erő is abba az irányba mutasson (centripetális erő).



INERCIARENDSZERBEN TÁRGYALJUK

A dinamika alapegyenlete: $m\vec{a} = \vec{F}_e$

Gyorsulásnak csak centripetális (sugár irányú) komponense van.

Az eredő erő nagysága:

$$F_e = ma = ma_{cp} = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$$

Ezt az eredő erőt sokféle kölcsönhatás biztosíthatja: lehet pl. gravitációs erő, Coulomb-erő, kötélerő, nyomóerő, Lorentz-erő, stb. stb.

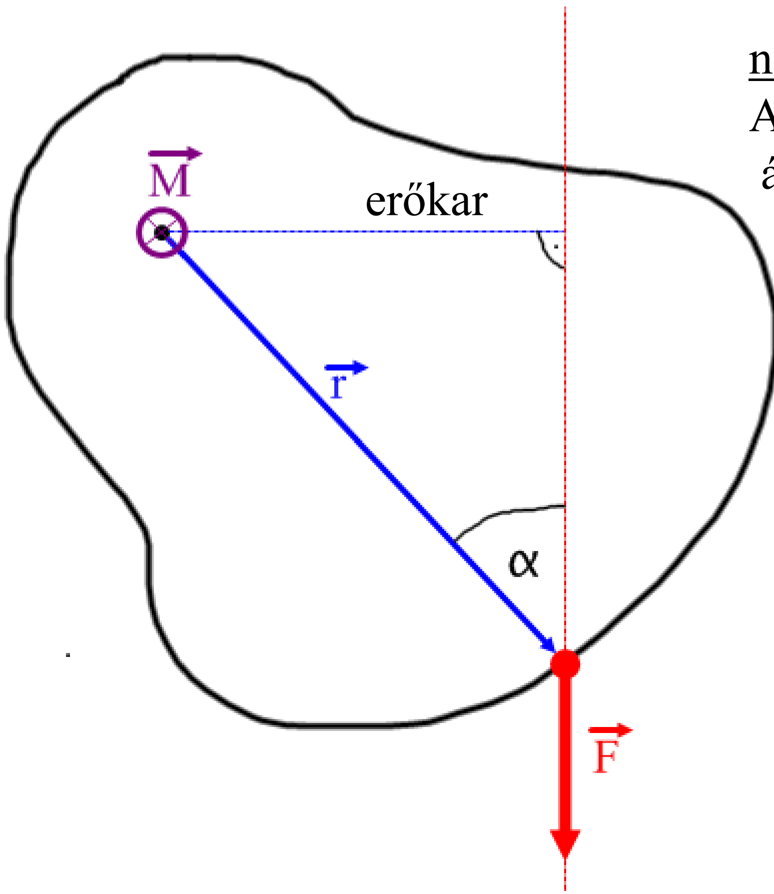
Ekkor $\vec{F}_e \perp \vec{v}$, tehát a **munkavégzés nulla**. A centripetális erő nem végez munkát.

A szögsebesség-vektor iránya a jobbkéz-szabállyal határozható meg. Az ábrán pl. kifelé.

Változó körmozgás - forgatónyomaték

Egy erő origóra (forgástengely) vonatkoztatott **forgatónyomatéka**: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Erőkar: az erő hatásvonalának a forgástengelytől mért távolsága



nagysága: erő × erőkar, vagyis $M = Fr_{\perp} = Fr\sin\alpha$
A forgatónyomaték nulla, ha az erő hatásvonala átmegy a forgástengelyen, maximális ha merőleges a helyvektorra.

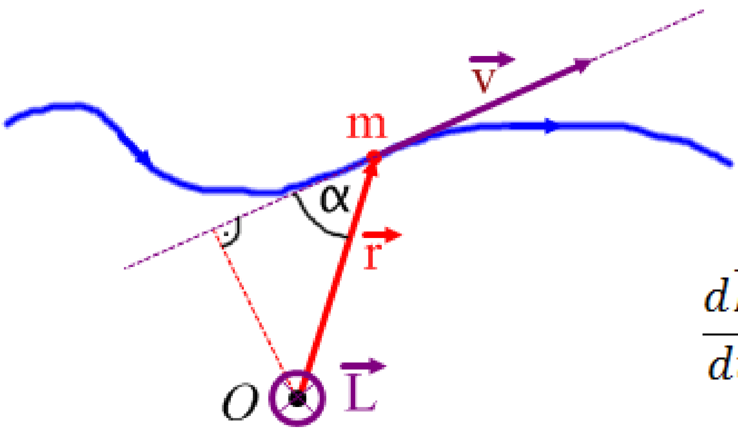
iránya: a vektorszorzat alapján (jobbkéz-szabály) merőleges az erő és a helyvektor által meghatározott síkra.

Perdület (impulzusmomentum)

Pontszerű test **perdületének** általános definíciója: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$
(hasonló a forgatónyomaték definíciójához, ami az erő momentuma)

Ha a helyvektor és a sebesség merőleges, mint pl. egyenletes körmozgásnál:

$$L = rmv = mrv = mr\omega r = mr^2\omega$$



A perdület vektor a forgatónyomaték hatására változik meg:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \vec{v}) = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right) =$$

$$= m(\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times (m\vec{a}) = \vec{r} \times \vec{F}_e = \vec{M}_e$$

Perdülettétel: $$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_e}$$

Tehetetlenségi nyomaték

<u>Speciális eset</u>: tömegpont rögzített tengely körül, állandó távolságban mozog (körmozgás)

$$L(t) = mr^2\omega(t)$$

Ekkor a perdületet idő szerint deriválva: $\frac{dL}{dt} = mr^2\frac{d\omega(t)}{dt} = mr^2\beta(t)$

β a szöggyorsulás, az mr^2 tag pedig a tömegpont **tehetetlenségi nyomatéka**.

Tömegpontra a tehetetlenségi nyomaték tehát: $\boxed{\theta = mr^2}$, ahol r a tengelytől mért távolság.

A perdülettételt felhasználva: $\frac{dL}{dt} = mr^2\frac{d\omega(t)}{dt} = \theta\beta(t) = M$

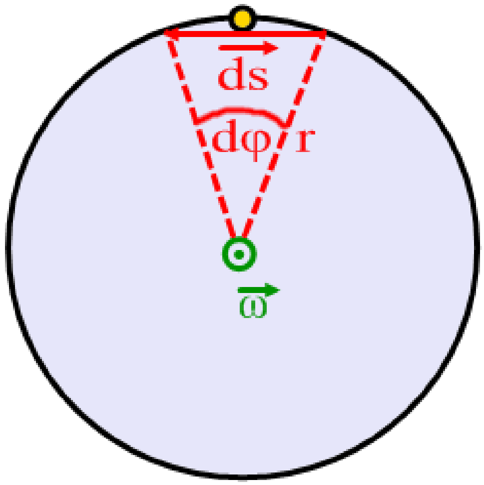
Megkaptuk a forgómozgás alapegyenletét: $\boxed{M = \theta\beta}$

A tömegpont **mozgási energiája**: $E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}\theta\omega^2$

Munka és teljesítmény

Az elemi munka egy infinitezimális elmozdulás során (körmozgás):

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m\vec{a} \cdot d\vec{s} = ma_t ds = m\beta r ds = m\beta r^2 d\phi = \theta\beta d\phi = M d\phi$$



Ebből a teljesítmény:

$$P = \frac{dE_K}{dt} = \frac{\delta W}{dt} = M\frac{d\phi}{dt} = M\omega$$

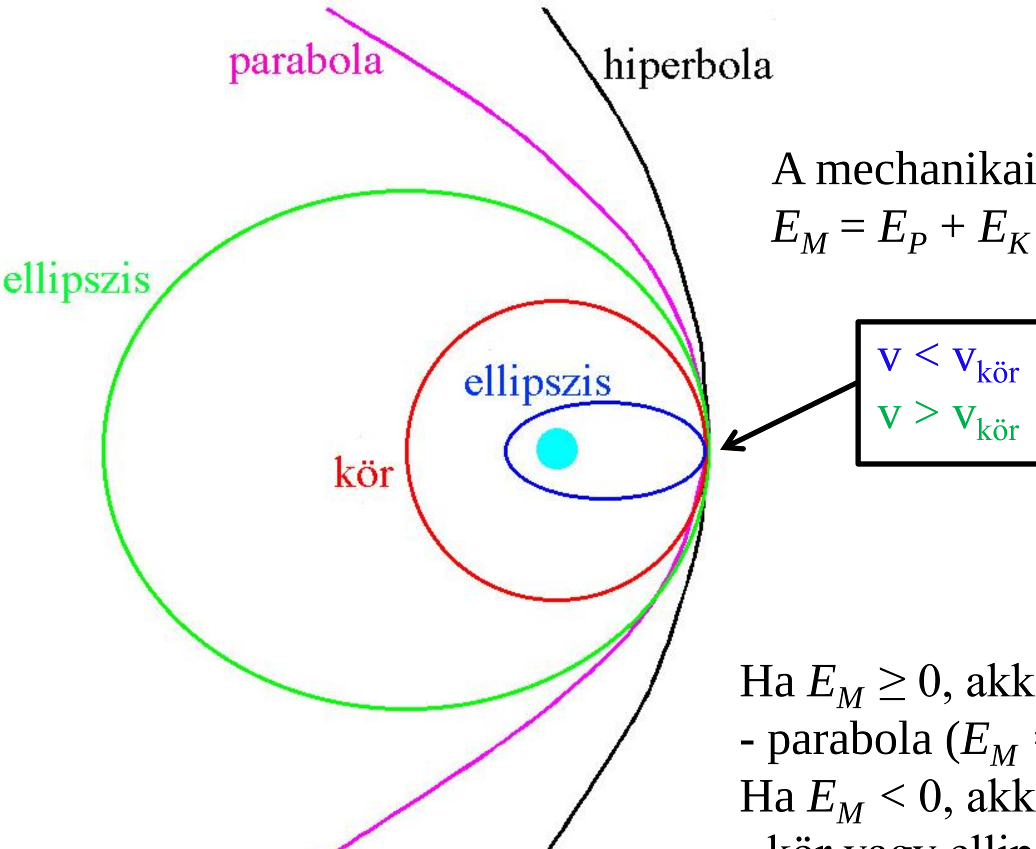
Haladó és forgó mozgások közötti analógia

	Haladó mozgás (1 dimenzió)	Forgó mozgás
változó	x	φ
(szög)sebesség	v_x	ω
(szög)gyorsulás	a_x	β
tehetetlenség	m	θ
A (szög)gyorsulás oka	$F_x = m a_x$	$M = \theta\beta$
Impulzus(momentum)	$p_x = m v_x$	$L = \theta\omega$
Kinetikus energia	$\frac{1}{2} m v_x^2$	$\frac{1}{2} \theta\omega^2$
munka	$F_x \Delta x$	$M\Delta\varphi$
teljesítmény	$F_x v_x$	$M\omega$

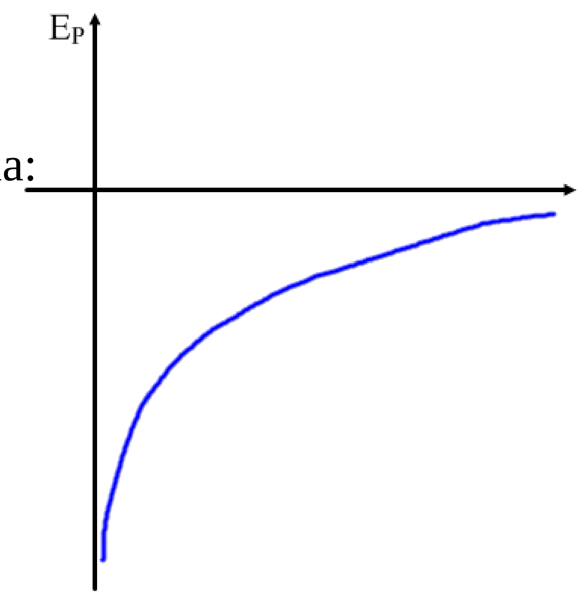
Bolygók mozgása

Tegyük fel, hogy *m* tömegű test mozog egy sokkal nagyobb (*M*) tömegű test gravitációs terében. Mivel *M* sokkal nagyobb, mint *m*, ezért nyugvónak tekinthető. pl. Nap és Föld.

Az *m* tömegű test rendelkezik E_K kinetikus és E_P potenciális energiával.
A végtelenben vesszük a nullpontot: $E_P = 0$, ha $r \rightarrow \infty$



A mechanikai energia:
$E_M = E_P + E_K$



Ha $E_M \geq 0$, akkor szabad (eltávolodhat végtelenbe)
- parabola ($E_M = 0$) vagy hiperbola alakú pálya

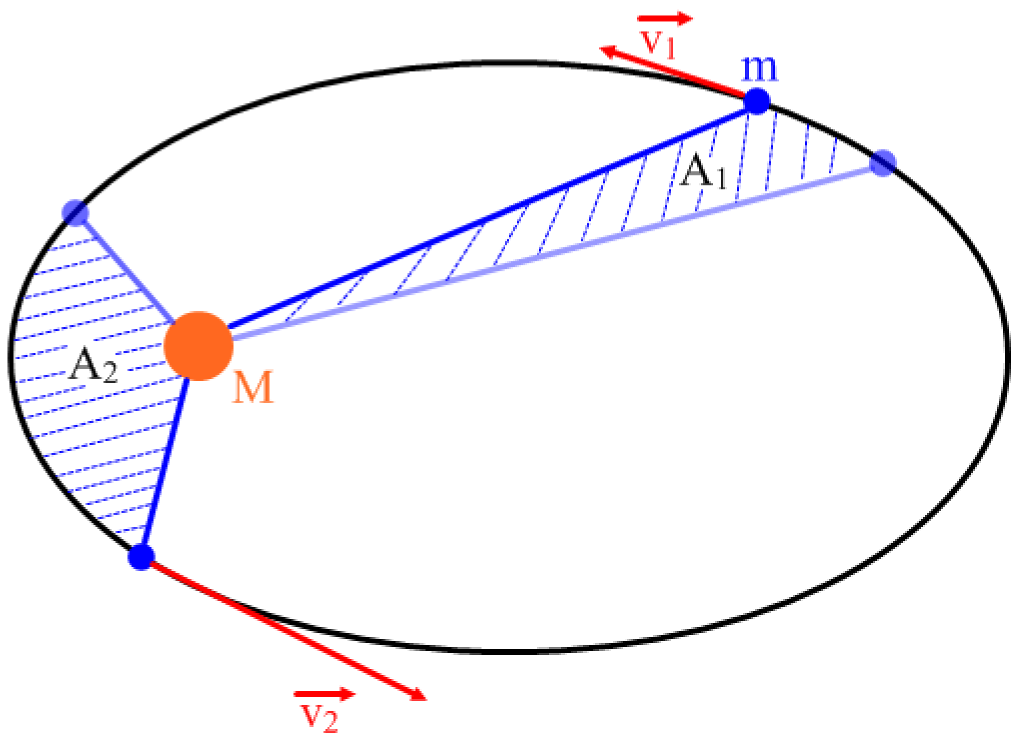
Ha $E_M < 0$, akkor kötött (véges távolságban marad)
- kör vagy ellipszis alakú pálya

Kepler törvényei I-II.

Egy nagy tömegű test gravitációs terében kötött állapotban mozgó testekre (pl. bolygók).

I. A bolygók pályája ellipszis, és annak egyik gyújtópontjában a Nap áll.

II. (Területi tétel) A bolygók vezérsugara (a bolygót a Nappal összekötő szakasz) egyenlő idő alatt egyenlő területet súrol. A bolygók Napközelben gyorsabban mozognak.
A perdület megmaradásából következik: nincs forgatónyomaték centrális erőtérben.

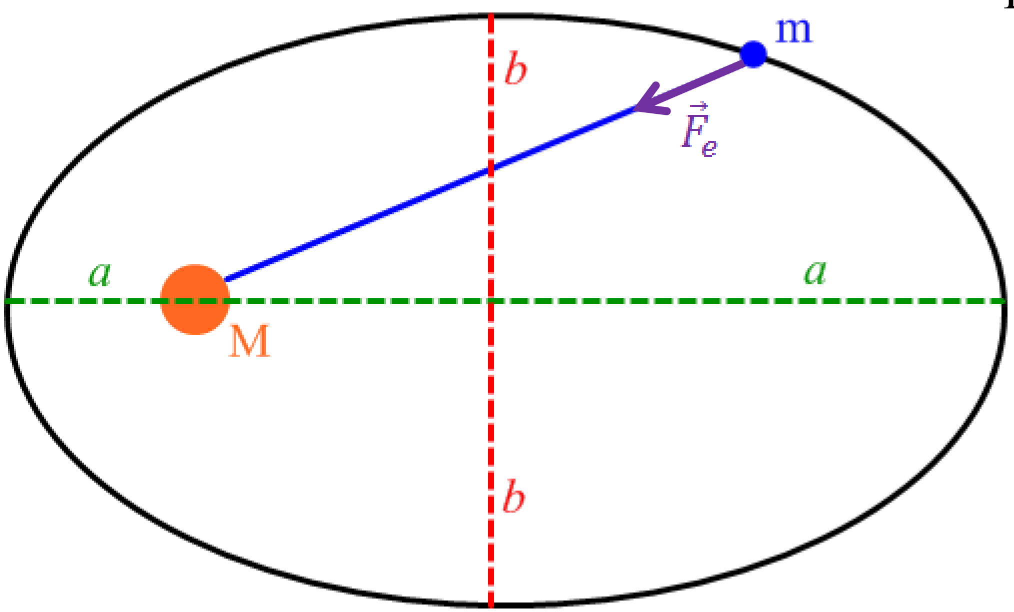


Kepler III. törvénye

III. Az ellipszispályák fél-nagytengelyeinek (*a*) köbei úgy aránylanak, mint az adott pályákon keringő bolygók keringési idejének (*T*) négyzetei.

Tehát minden a Nap körül keringő bolygóra (és bármilyen testre): $\frac{a^3}{T^2} = \text{állandó}$

Mindhárom törvény a Newton axiómákból, és a Newton-féle gravitációs erőtörvényből levezethető.



Bizonyítás kör alakú pályára: $a = b = R$

$$F_e = ma$$

$$\gamma \frac{Mm}{R^2} = m\omega^2 R$$

$$\gamma \frac{M}{R^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} R$$

$$\frac{\gamma M}{4\pi^2} = \frac{R^3}{T^2} = \text{állandó}$$