

Folyadékok és gázok mechanikája

Hidrosztatikai nyomás

A folyadékok és gázok közös tulajdonsága, hogy alakjukat szabadon változtatják. Ha a részecskékből álló felépítés helyett ezeket folytonos tömegeloszlásúnak tekintjük, akkor **kontinuumról** beszélünk.

Hidrosztatika: nyugvó folyadékok mechanikája

Nyomás: Egy pontban a nyomás a pontot körülvevő (végtelen) kicsiny felületre ható erő felületre merőleges komponense, osztva a felület nagyságával. Skalár mennyiség.

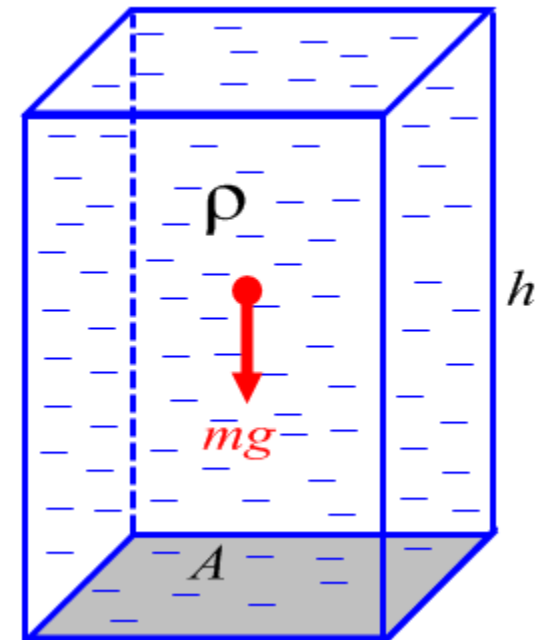
$$p = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{F_{\perp}(A)}{A} \quad \text{Mértékegysége: } [p] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa (Pascal)}$$

A **hidrosztatikai nyomás** a folyadék (h magasságú oszlop) súlyereje által okozott nyomás (egyenletesen oszlik el):

$$p = \frac{F_{\perp}(A)}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{V\rho g}{A} = \frac{Ah\rho g}{A} = h\rho g \quad \rho: \text{ sűrűség}$$

Mivel a folyadék alakja szabadon változhat, adott mélységben a nyugvó folyadék nyomása nem függ a felület irányításától, a kifejtett erő pedig mindig merőleges a felületre.

Pascal törvénye: Egynemű nyugvó folyadék azonos magasságú pontjaiban a nyomás azonos.



Pascal törvénye - Példa

Egy U alakú üvegcső baloldali vége zárt, a másik nyitott. A csőben alul $13,6\text{g/cm}^3$ sűrűségű higany, a jobb szárban e fölött 50cm magas vízoszlop van. A légköri nyomás 1bar , a bal szárban a Hg fölött a levegő nyomása $0,9\text{bar}$. Mekkora a magasságkülönbség a két higanyszint között?

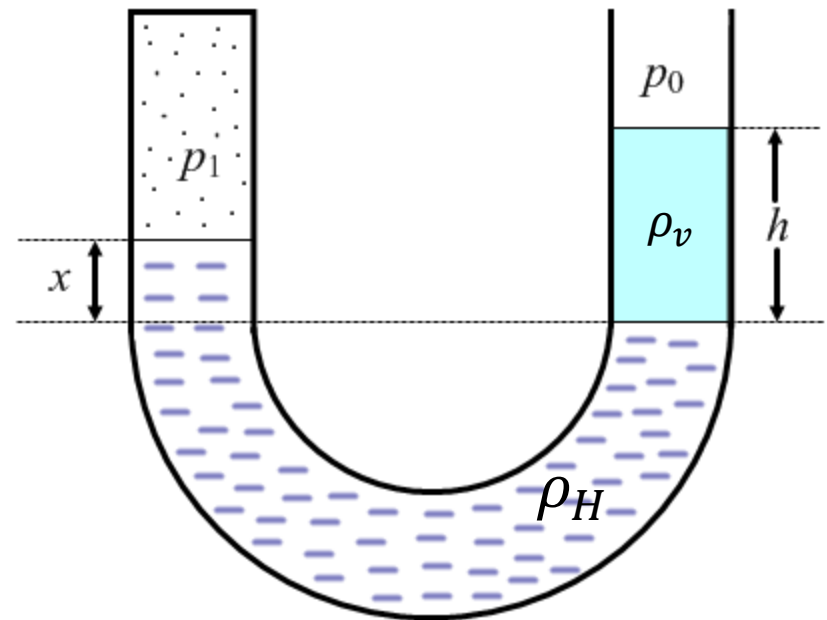
$$p_0 = 10^5\text{Pa}, \quad p_1 = 0,9 \cdot 10^5\text{Pa}, \quad h = 50\text{cm}$$

A higanyban, mint egynemű nyugvó folyadékban a szaggatott vonallal megjelölt szinten a bal és jobb oldalon meg kell egyeznie a nyomásnak:

$$p_b = p_j$$

$$p_1 + x\rho_H g = p_0 + h\rho_v g$$

$$x = \frac{p_0 + h\rho_v g - p_1}{\rho_H g} = \dots = 11,17\text{cm}$$



Felhajtó erő

A **felhajtó erő** a folyadék által a test teljes felületére kifejtett eredő erő.

A téglatest alakú test lapjaira:

- elülső és hátulsó eredője nulla
- bal oldali és jobb oldali eredője nulla
- alsó és felső eredője...

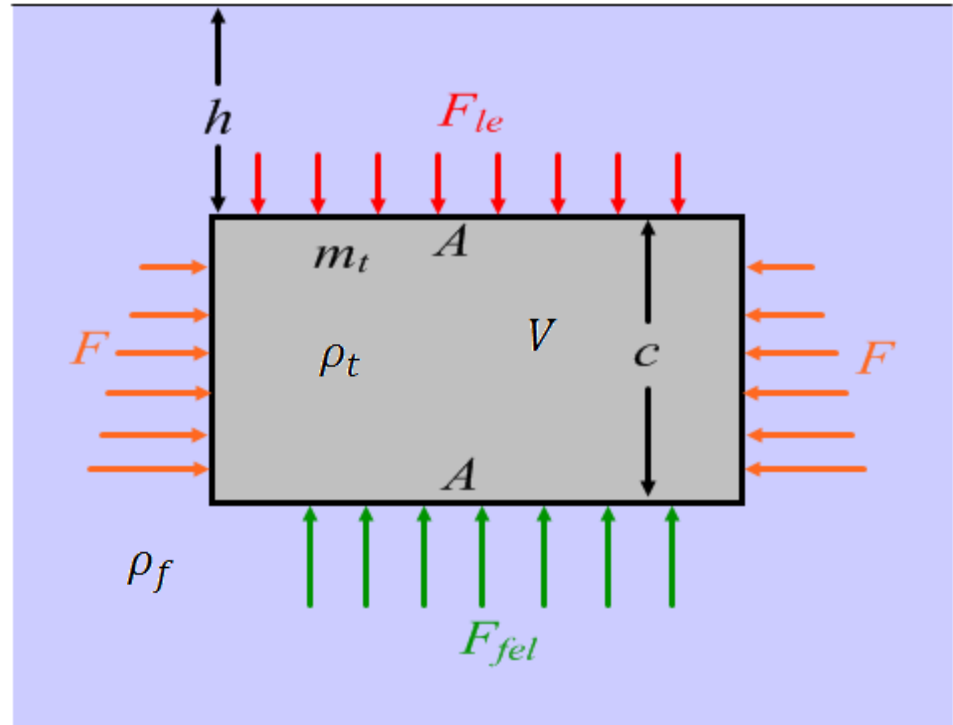
$$\begin{aligned} F_f &= F_{fel} - F_{le} = p_{lent}A - p_{fent}A = \\ &= \rho_f g(h + c)A - \rho_f ghA = \rho_f gcA = \\ &= \rho_f Vg = m_f g \end{aligned}$$

V a test által kiszorított folyadék térfogata, aminek tömege m_f

Tehát a felhajtó erő nagysága egyenlő a kiszorított folyadék súlyával. Ez más alakra is igaz.

Archimédész törvénye: Minden folyadékba mártott testre felhajtó erő hat, amely egyenlő a kiszorított (bemerülő rész által) folyadék súlyával.

Ha a test sűrűsége nagyobb mint a folyadéké akkor elmerül, mert a felhajtóerő kisebb mint a test súlya. Ha a folyadék sűrűsége nagyobb, akkor a test egy része nem merül el, a test úszik.



Felhajtó erő - elmerülés

Amennyiben a test sűrűsége nagyobb mint a folyadéké: $\rho_t > \rho_f$
A test teljes térfogata a víz alá merül.

A felhajtó erő nagysága: $F_f = V\rho_f g$

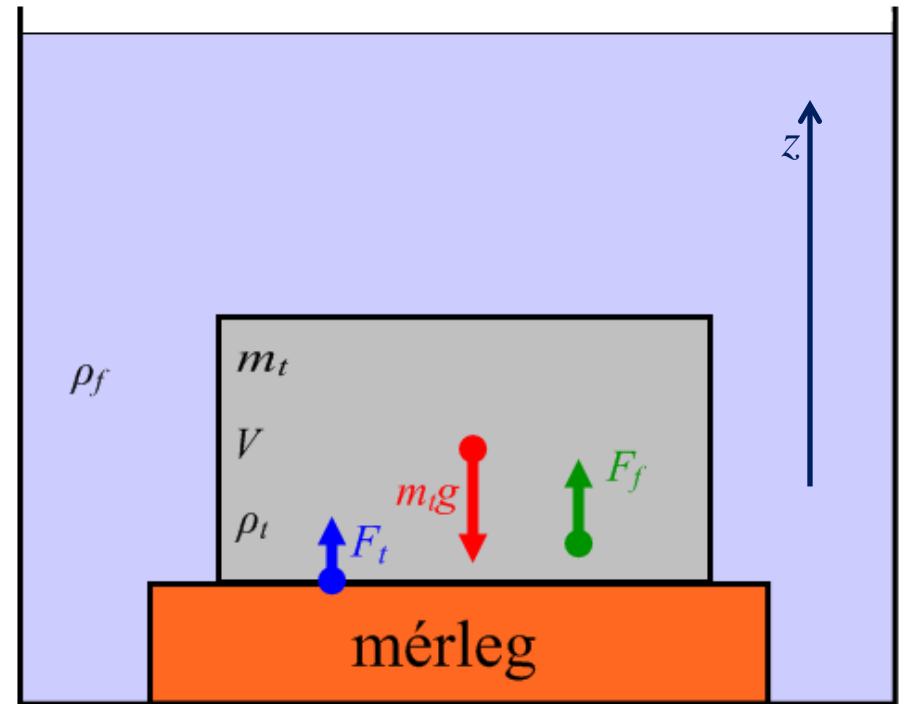
A test egyensúlyához egy tartó erő is szükséges, pl. egy mérleg a folyadék alján.

A test egyensúlyának feltétele: $F_e = 0$

$$F_f + F_t - m_t g = 0$$
$$V\rho_f g + F_t - V\rho_t g = 0$$

A szükséges tartó erő tehát (látszólagos súly):

$$F_t = Vg(\rho_t - \rho_f)$$



Abban az esetben amikor a test és a folyadék sűrűsége megegyezik, a tartó erő nulla.
Egy tetszőleges mélységbe helyezett test ekkor nyugalomban van, hiszen $F_f = m_t g$

Felhajtó erő - úszás

Amennyiben a V térfogatú test sűrűsége kisebb mint a folyadéké: $\rho_t < \rho_f$

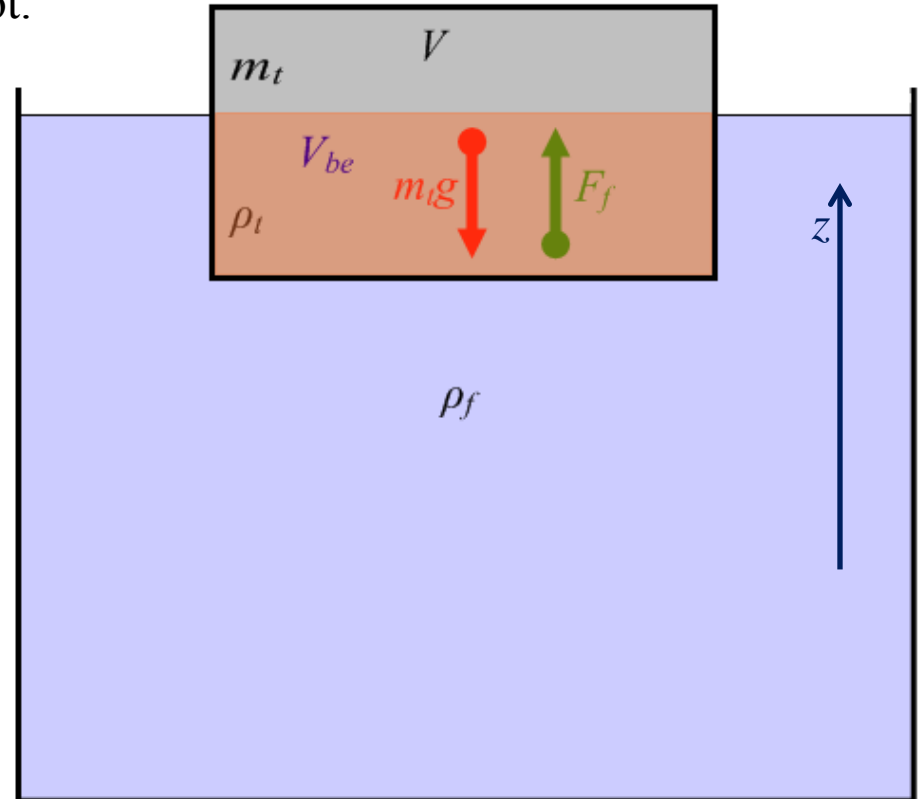
A test egy része nem merül el.

Csak a bemerült rész (V_{be}) szorít ki folyadékot.

A felhajtó erő nagysága tehát: $F_f = V_{be}\rho_f g$

A test egyensúlyának feltétele: $F_e = 0$

$$\begin{aligned}F_f - m_t g &= 0 \\V_{be}\rho_f g &= V\rho_t g \\ \frac{V_{be}}{V} &= \frac{\rho_t}{\rho_f}\end{aligned}$$



A test bemerülő részének térfogata úgy aránylik annak teljes térfogatához, mint a sűrűsége a folyadék sűrűségéhez.

Felhajtó erő – Példa (89)

Egy téglatest alakú fadarab méretei: $50\text{cm} \times 40\text{cm} \times 10\text{cm}$, sűrűsége 600kg/m^3 .

Milyen mélyre fog (a vízben legnagyobb lapjával úszó) fadarab a vízbe merülni, ha egy 4kg -os testet teszünk rá?

$$h = 10\text{cm} = 0,1\text{m}$$

$$A = 0,5\text{m} \cdot 0,4\text{m} = 0,2\text{m}^2$$

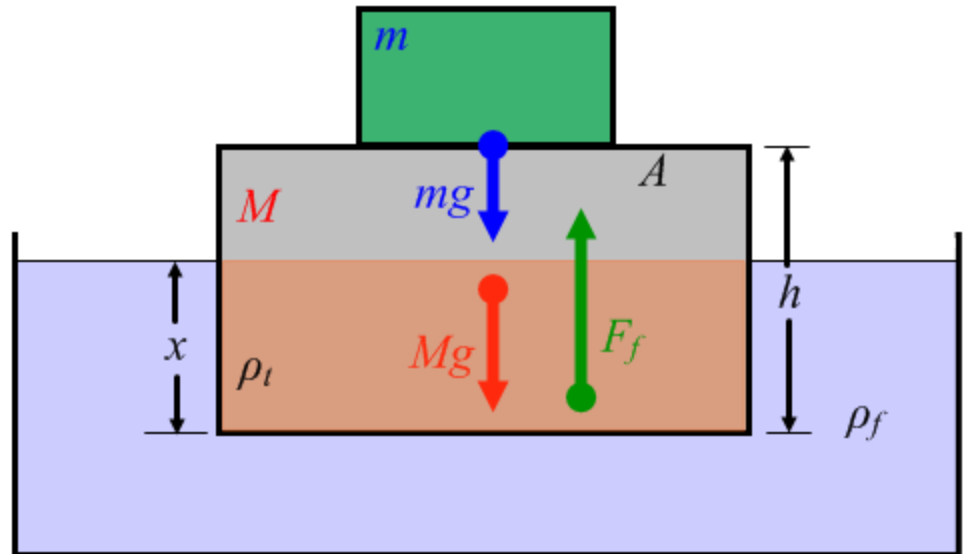
$$\text{A felhajtó erő nagysága: } F_f = V_{be} \rho_f g = x A \rho_f g$$

A test egyensúlyának feltétele: $F_e = 0$

$$F_f = Mg + mg$$

$$x A \rho_f g = h A \rho_t g + mg$$

$$x = \frac{h A \rho_t + m}{A \rho_f} = \dots = 8\text{cm}$$



Felületi feszültség

Mosószeres vízbe mártott drótkeret oldalaira a kifeszült hártya összehúzó erőt fejt ki.

Az alsó d hosszúságú oldalra:

$$F = 2\alpha d \quad \text{ahol } \alpha \text{ a felületi feszültség.}$$

A kettes szorzó az elülső és hátulsó felületek miatt van (2 felület).

Ha az alsó oldal egy mozgatható rúd, amely s távolságot mozdul felfelé, a felület megváltozása:

$$\Delta A = -2ds \quad (2 \text{ oldal továbbra is})$$

A szappanhártya erejének munkája pedig:

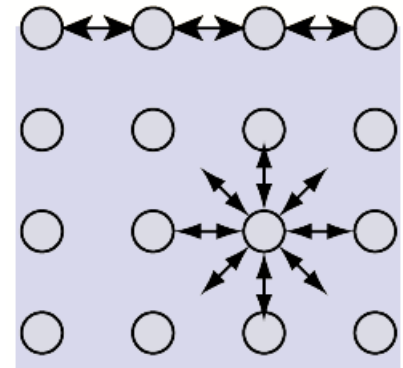
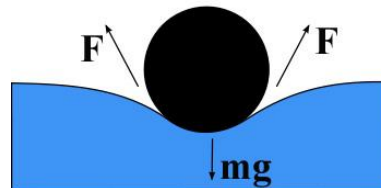
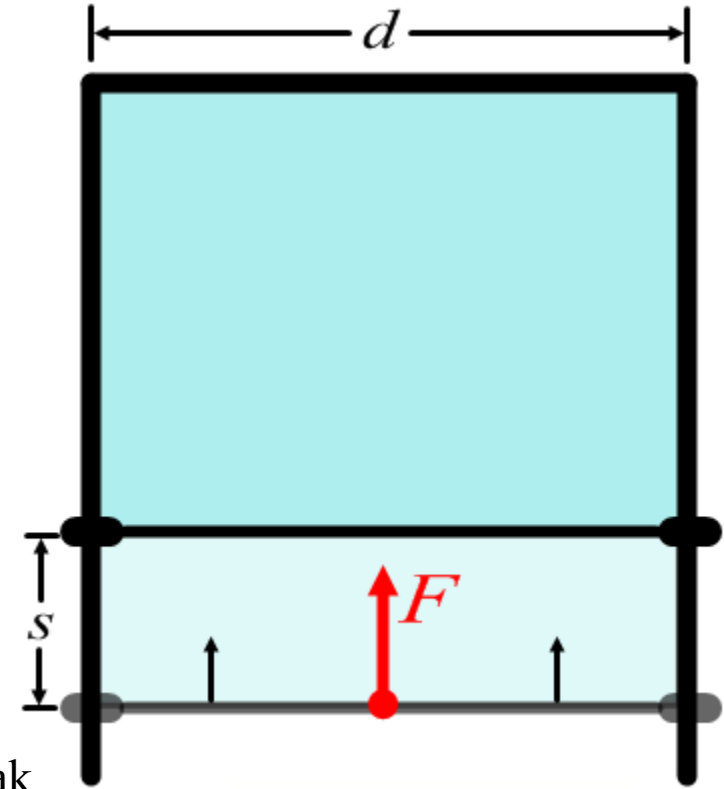
$$W = Fs = 2\alpha ds = -\alpha\Delta A$$

Mivel a munka a felületváltozással arányos, a folyadéknak a felületével arányos energiája van:

$$E = \alpha A$$

Ennek oka a molekulák közötti vonzó kölcsönhatásban rejlik.

A felületet igyekszik a folyadék minimalizálni: csepp alakja



Tömegmegmaradás

A **hidrodinamika** a folyadékok, mint kontinuumok áramlását leíró tudományág.

Kétféle tárgyalásmód:

1. Lagrange-módszer: az egyes kiszemelt folyadékreszekre a Newton féle mozgásegyenletet írjuk fel, és a kezdeti feltételeket használva megoldjuk.

2. Euler-féle leírás: a különböző pontokban az ott áramló folyadék tulajdonságait mérjük (pl. sebesség, nyomás, sűrűség).

Ha ezek időben állandóak minden pontban, akkor **stacionárius** áramlásról beszélünk.

Kontinuitási egyenlet: A tömeg megmaradó mennyiség, nem keletkezik, és nem tűnik el. Tekintsünk egy nyugvó V térfogatot, amelyet az A zárt felület határol. A dt idő alatt a dA elemi felületdarabon kiáramló tömeg: $dm = \rho dV = \rho dA v \cos \alpha dt = \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} dt$

Tehát időegység alatt: $\frac{dm}{dt} = \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$

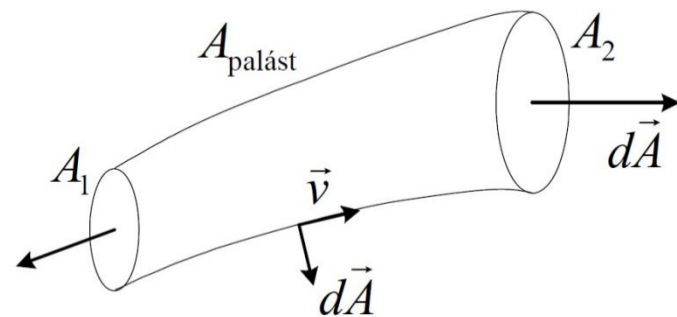
A V térfogatból a teljes A felületen keresztül időegység alatt kiáramló tömeg megegyezik a térfogatban lévő tömeg csökkenésével (negatív deriváltjával):

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \oint_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

Kontinuitási egyenlet

Stacionárius (időben állandó) áramlás: Minden idő szerinti derivált nulla.

$$0 = \oint_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \int_{A_2} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \int_{A_p} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

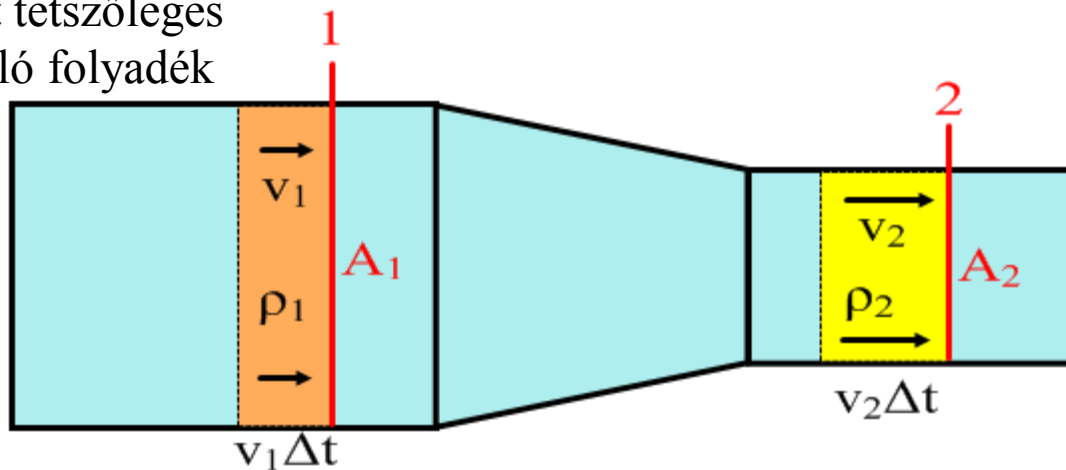


A palástra vett integrál nulla, mert a sebesség párhuzamos a felülettel. Tehát a két végen történő be- és kiáramlás ki kell, hogy ejtse egymást.

Ennek eredménye, hogy egy cső két tetszőleges helyén a keresztmetszeteken átáramló folyadék tömege megegyezik.

Az A_1 és A_2 keresztmetszetű helyekre Δt idő alatt:

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 \\ \rho_1 V_1 &= \rho_2 V_2 \\ \rho_1 A_1 v_1 \Delta t &= \rho_2 A_2 v_2 \Delta t \end{aligned}$$

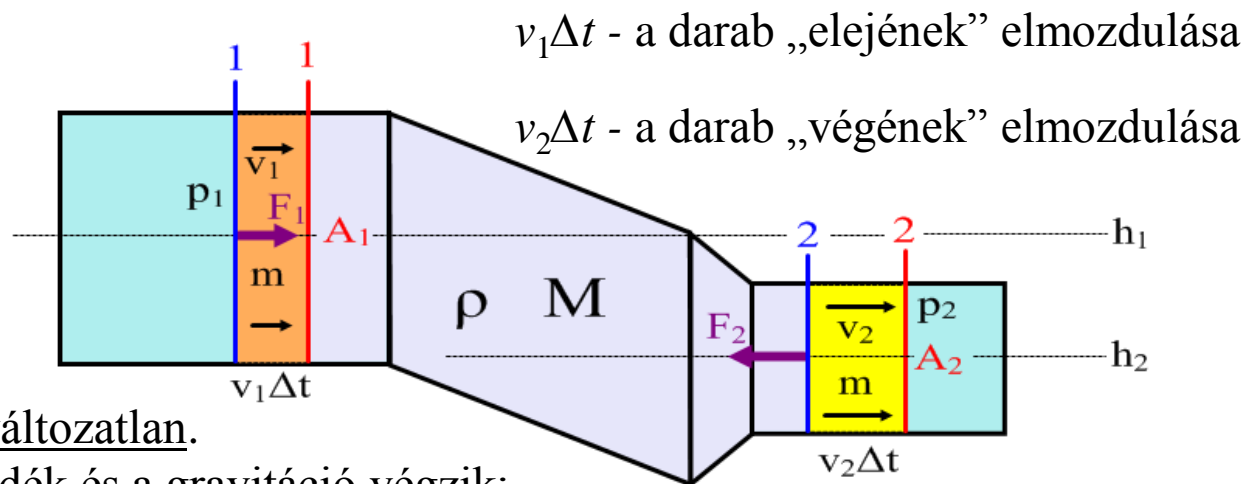


$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$ a **tömegáram** ugyanaz a cső mentén.

Összenyomhatatlan folyadéokra ($\rho_1 = \rho_2$): $A_1 v_1 = A_2 v_2$ a **térfogatáram** is ugyanaz a cső mentén.

Bernoulli egyenlet

Alkalmazzuk a $W = \Delta E_K$ munkatételt a h_1 magasságban lévő A_1 keresztmetszetű rész és a h_2 magasságban lévő A_2 keresztmetszetű rész között az $m + M$ tömegű összenyomhatatlan ρ sűrűségű folyadékdarabra, stacionárius áramlás esetén. Kis Δt idő alatt:



Az M tömegű közbülső rész változatlan.

A munkát a szomszédos folyadék és a gravitáció végzik:

$$W = W_f + W_g = F_1 v_1 \Delta t - F_2 v_2 \Delta t + mg(h_1 - h_2) = p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t + mg(h_1 - h_2) = \\ = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V + \rho \Delta V g (h_1 - h_2) = \Delta V (p_1 - p_2 + \rho g h_1 - \rho g h_2)$$

A kinetikus energia megváltozása: $\Delta E_K = E_{K2}(m) + E_K(M) - E_{K1}(m) - E_K(M)$

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \Delta V \left(\frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 \right)$$

Tehát:

$$p_1 - p_2 + \rho g h_1 - \rho g h_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 \rightarrow p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2$$

Bernoulli egyenlet - Példa

Milyen sebességgel folyik ki egy vödör alján fúrt lyukon a víz, ha a vödörben h magasságig van víz?

Feltételezve, hogy a vízszint nagyon lassan csökken: $v_1 \approx 0$

A Bernoulli-egyenletet felhasználva:

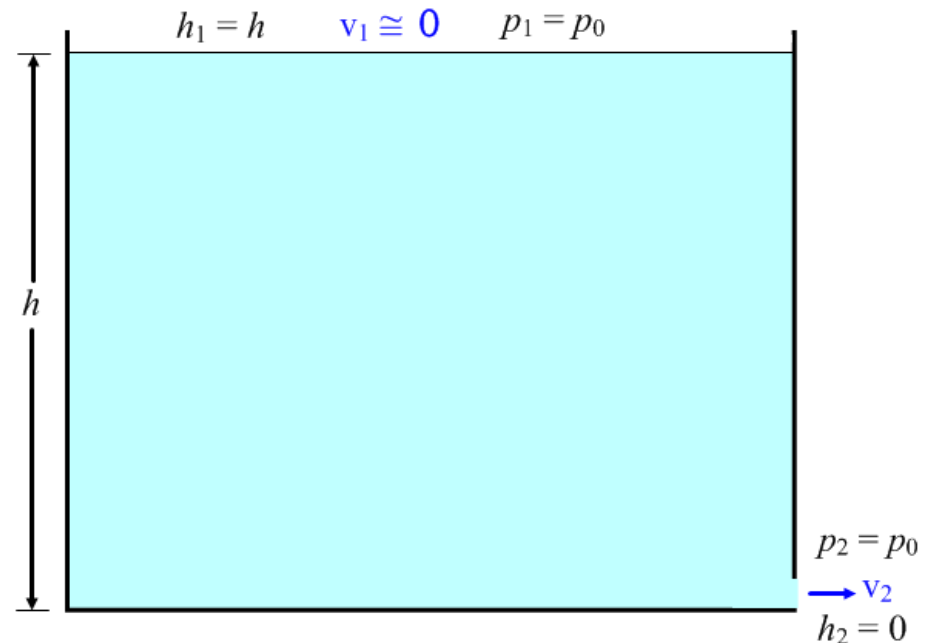
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

$$p_0 + 0 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + 0$$

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$2gh = v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$



A sebesség megegyezik azzal, amit egy h magasságból szabadon eső test érne el.