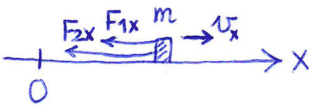
A 10 kg tömegű *P* tömegpont az *x* tengelyen mozog. Két erő ha rá: az egyik az *O* kezdőpont felé mutat és *OP*-vel arányos, az arányossági tényező 250 N/m; a másik a pont sebességével arányos és azzal ellentétes irányú, az arányosság tényezője 60 Ns/m. Kezdetben *P* kitérése az *O* ponttól 8 m, sebessége pedig zérus. Hogyan változik a pont *x* koordinátája az idő függvényében?

$m=10\,\mathrm{kg}$ $\quad D=250\,\frac{N}{m}$ $\quad b=60\,\frac{Ns}{m}$ $\quad x_0=8\,m$ $\quad v_{x0}=0$ $\quad x(t)=?$

$$F_{1x}=-Dx \qquad F_{2x}=-bv_x=-b\dot{x}$$



Dinamika alapegyenlete: $m\vec{a}=\vec{F_e}$

1D → csak (x) kell: $ma_x=-Dx-bv_x$

$$m\ddot{x}=-Dx-b\dot{x}$$

Mozgásegyenletből: $m\ddot{x}+b\dot{x}+Dx=0 \quad /:m$

$$\ddot{x}+\frac{b}{m}\dot{x}+\frac{D}{m}x=0 \qquad \text{itt } \frac{b}{m}=2\alpha \text{ és } \frac{D}{m}=\omega_0^2$$

$\alpha=\frac{b}{2m}=\frac{60\frac{Ns}{m}}{20\,kg}=3\,\frac{1}{s}$ (csillapítási tényező) Lásd az előadás diát!

$\omega_0=\sqrt{\frac{D}{m}}=\sqrt{\frac{250\,N/m}{10\,kg}}=5\,\frac{1}{s}$ (ennyi lenne a csillapítatlan rezgés körfrekvenciája)

Másodrendű, lineáris, homogén differenciál egyenlet:

$\ddot{x}+2\alpha\dot{x}+\omega_0^2x=0$ $\qquad x(t)=Ce^{\lambda t}$ alakban keressük

$C\lambda^2e^{\lambda t}+2\alpha C\lambda e^{\lambda t}+\omega_0^2Ce^{\lambda t}=0 \quad /:Ce^{\lambda t}$ (nem lehet nulla úgysem...)

$\lambda^2+2\alpha\lambda+\omega_0^2=0$ (karakterisztikus egyenlet)

$$\lambda_{1,2}=\frac{-2\alpha\pm\sqrt{4\alpha^2-4\omega_0^2}}{2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}=-\alpha\pm i\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}=-3\,\frac{1}{s}\pm i\underbrace{\sqrt{25\frac{1}{s^2}-9\frac{1}{s^2}}}_{4\frac{1}{s}=\omega}$$

$$\boxed{\lambda_1=-3-4i\ \frac{1}{s}} \qquad \boxed{\lambda_2=-3+4i\ \frac{1}{s}}$$

Az $\omega=4\,\frac{1}{s}$ lesz a kialakuló csillapított rezgés (kvázi-periodikus) tényleges körfrekvenciája. A csillapítás miatt kisebb mint ω_0.

Általános megoldás: $x(t)=Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t+\delta)$

$$x(t) = A e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \delta) \qquad \alpha = 3\tfrac{1}{s} \;, \omega = 4\tfrac{1}{s}$$

A-t és δ-t a kezdőfeltételekből kell meghatározni:

$t = 0$ esetén $x(0) = 8m$ és $\dot{x}(0) = 0$

$$\left[x(0) = A \cos\delta \right] \; (1) \quad \text{(kezdeti kitérés)}$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -A\alpha e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \delta) - A\omega e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \delta)$$

$$\left[\dot{x}(0) = -A(\alpha \cos\delta + \omega \sin\delta) = 0 \right] \; (2) \quad \text{(kezdeti sebesség)}$$

$$\alpha \cos\delta + \omega \sin\delta = 0$$

$$\sin\delta = -\frac{\alpha}{\omega} \cos\delta \quad /:\cos\delta$$

$$\mathrm{tg}\,\delta = -\frac{\alpha}{\omega} = -\frac{3}{4} \longrightarrow \delta = -0{,}6435 \text{ (radián!)}$$

Beírva (1)-be: $x(0) = A\cos\delta = 8m$

$$A \cos(-0{,}6435) = 8m$$

$$A = 10m$$

Minden paraméter ismert:

$$x(t) = A e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \delta)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{x(t) = 10m \cdot e^{-3\frac{1}{s} \cdot t} \cos\left(4\tfrac{1}{s} \cdot t - 0{,}6435\right)}$$

(mozgástörvény)

$$\left(\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \right)$$

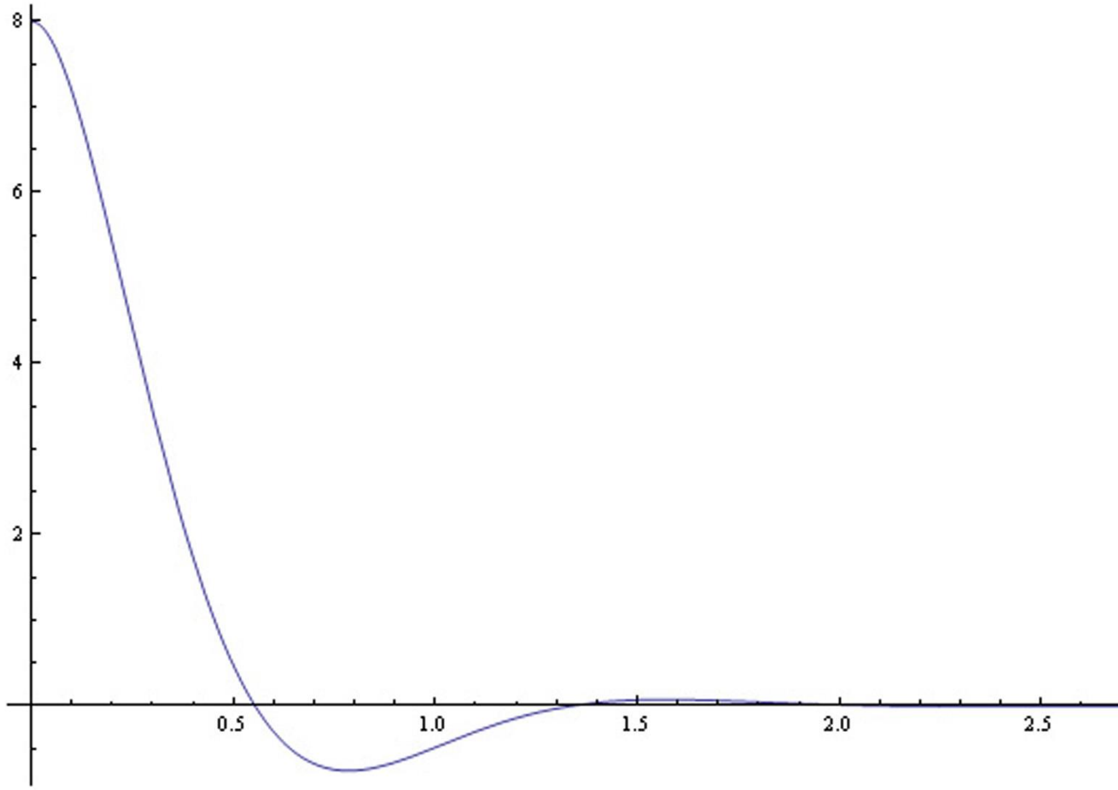
In[14]:= `x = 10 E^(-3 t) Cos[4 t - 0.6435]`

$$x = 10\,E^{-3t}\,\mathrm{Cos}[4\,t - 0.6435]$$

Out[14]= $10\,e^{-3t}\,\mathrm{Cos}[0.6435 - 4\,t]$

In[17]:= `Plot[x, {t, 0, 3}, PlotRange → Full]`

Out[17]=



In[16]:= `x /. t → 0 // N`

Out[16]= 8.00001