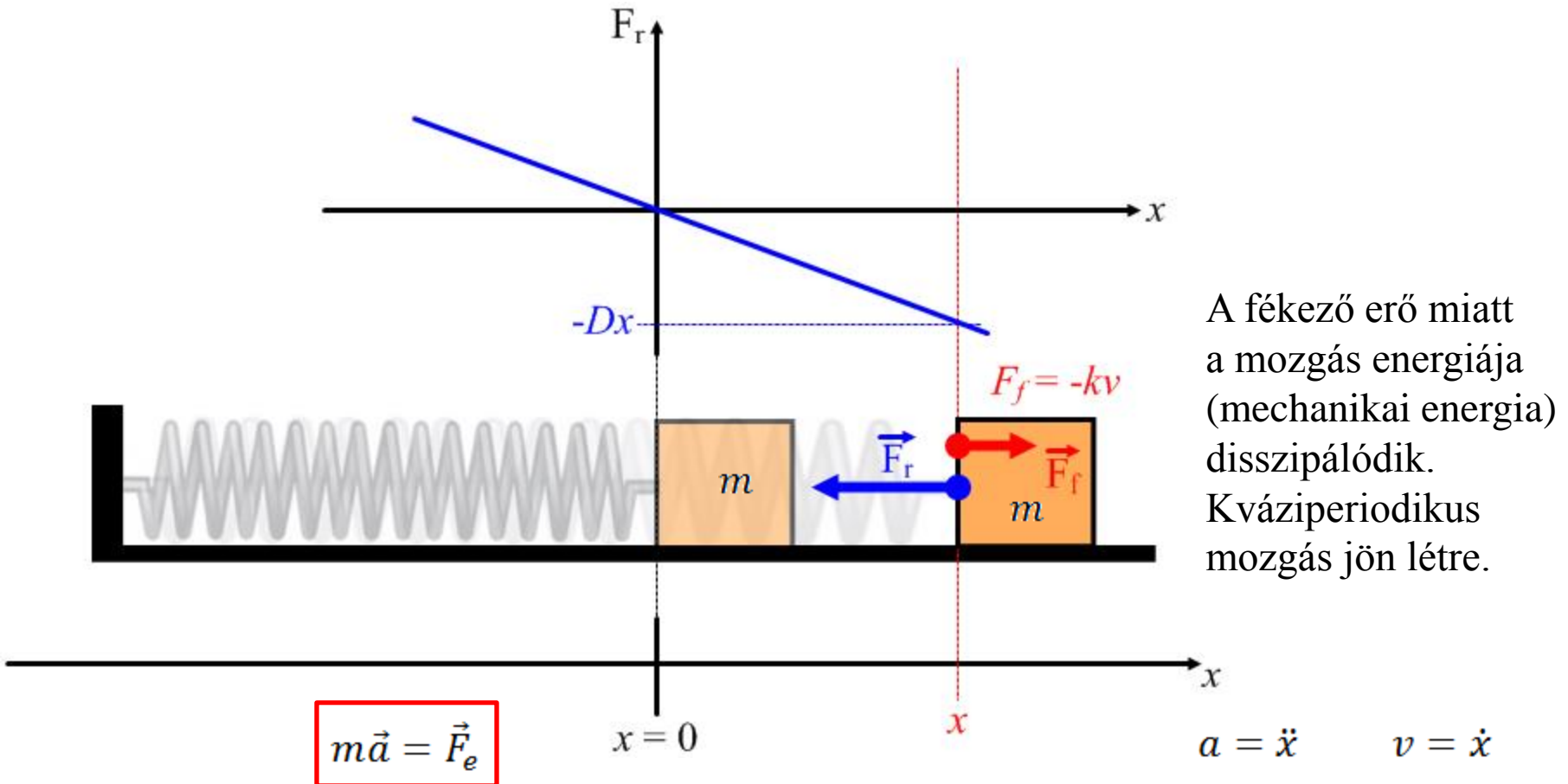


Csillapított rezgés

Csillapított rezgés: A valóságban a rezgések lassan vagy gyorsan, de csillapodnak. A rugalmas erőn kívül, még egy sebességgel arányos fékező erőt figyelembe véve:



A mozgásegyenlet (egyenes vonalú mozgás x mentén): $m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$

Csillapított rezgés mozgástörvénye

Kiindulva a mozgásegyenletből : $m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0 \quad \frac{D}{m} = \omega_0^2 \quad \omega_0 - \text{a csillapítatlan rezgés körfrekvenciája (lenne!)}$$

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \alpha = \frac{k}{2m} \quad \alpha - \text{a csillapítási tényező}$$

Homogén, lineáris, másodrendű differenciálegyenlet. Megoldás exponenciális: $x = e^{\lambda t}$

Behelyettesítve: $\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\alpha\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0$ és $e^{\lambda t} \neq 0$

Egyszerűsítve kapjuk a karakterisztikus egyenletet: $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$

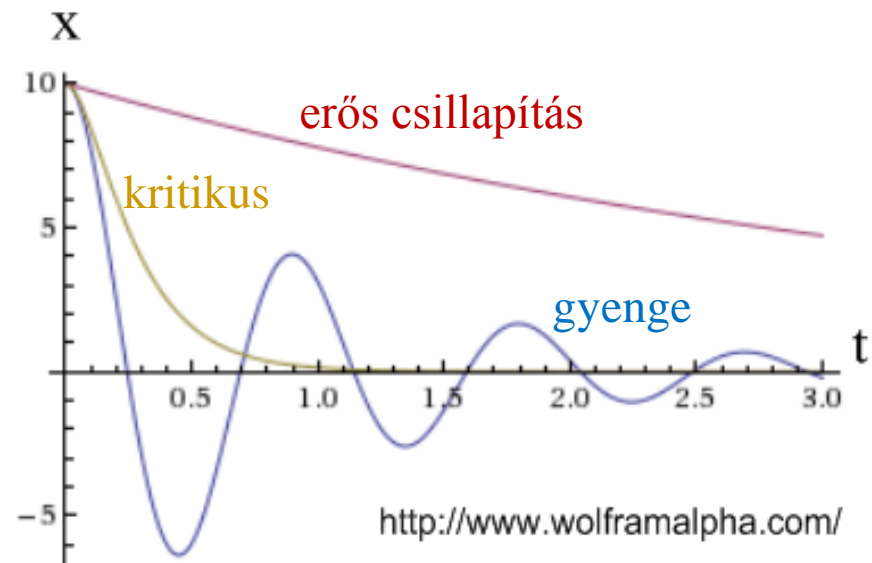
Megoldásai: $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

Három lehetséges eset

1. gyenge csillapítás: $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$

2. kritikus csillapítás: $\alpha^2 - \omega_0^2 = 0$

3. erős csillapítás: $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$



Gyengén csillapított rezgés

$$\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$$

A negatív diszkriminánst átalakítva:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\omega$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$x(t) = Ce^{-\alpha t} \sin(\omega t + \delta)$$

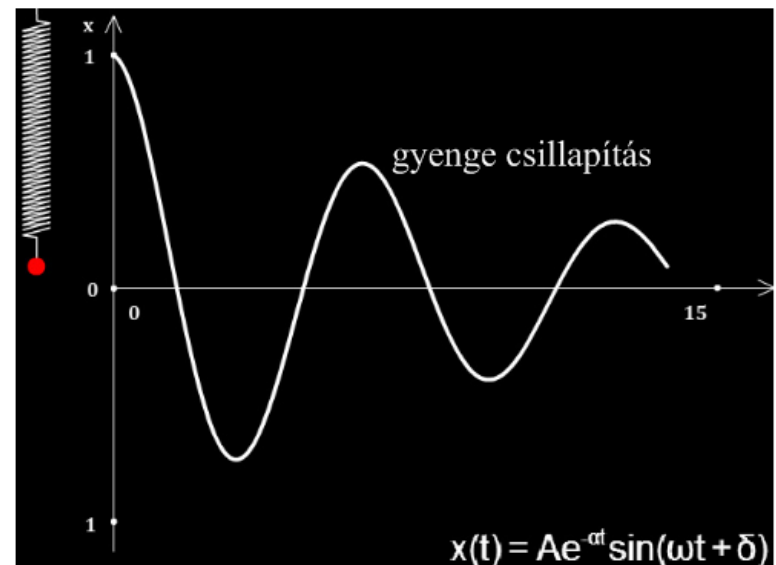
Ezt deriválva kapjuk a sebesség általános alakját:

$$v(t) = -\alpha Ce^{-\alpha t} \sin(\omega t + \delta) + \omega Ce^{-\alpha t} \cos(\omega t + \delta)$$

A C és δ konstansokat a **határfeltételekből** lehet meghatározni.

Pl. $x(0)$ és $v(0)$ megadható, és a két egyenletet megoldva a konstansok kiszámolhatók.

ANIMÁCIÓ!



Feladat: 7

Kényszerrezgés

Egy periodikus erő pótolja a disszipált energiát:

$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} + F_0\sin(\omega t)$$

Megoldás: egy időben lecsengő (előzőhöz hasonlóan) rezgés, és egy állandósuló rezgés a gerjesztő frekvencián.

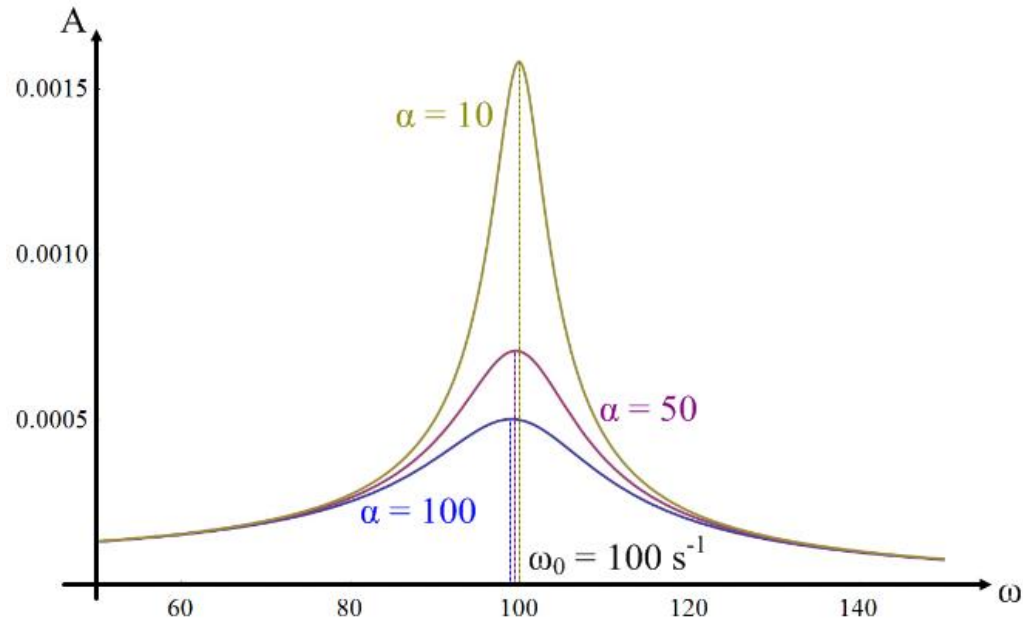
Tehát hosszabb idő múlva a mozgástörvény:

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \sin(\omega t - \delta) \quad \frac{D}{m} = \omega_0^2 \quad \omega_0 - \text{sajátfrekvencia}$$

$\delta - \text{fáziskésés}$

Rezonancia: Az az ω_r körfrekvencia, amire a rezgés amplitúdója a lehető legnagyobb.

Ha a csillapítás gyenge (α kicsi), akkor $\omega_r \approx \omega_0$ és az amplitúdó minden határon túl nőhet (amíg a rendszer szét nem esik...) – rezonancia katasztrófa.



Folyadékok és gázok mechanikája

Hidrosztatikai nyomás*

A folyadékok és gázok közös tulajdonsága, hogy alakjukat szabadon változtatják. Ha a részecskékből álló felépítés helyett ezeket folytonos tömegeloszlásúnak tekintjük, akkor **kontinuumról** beszélünk.

Hidrosztatika: nyugvó folyadékok mechanikája

Nyomás: Egy pontban a nyomás a pontot körülvevő (végtelen) kicsiny felületre ható erő felületre merőleges komponense, osztva a felület nagyságával. Skalár mennyiség.

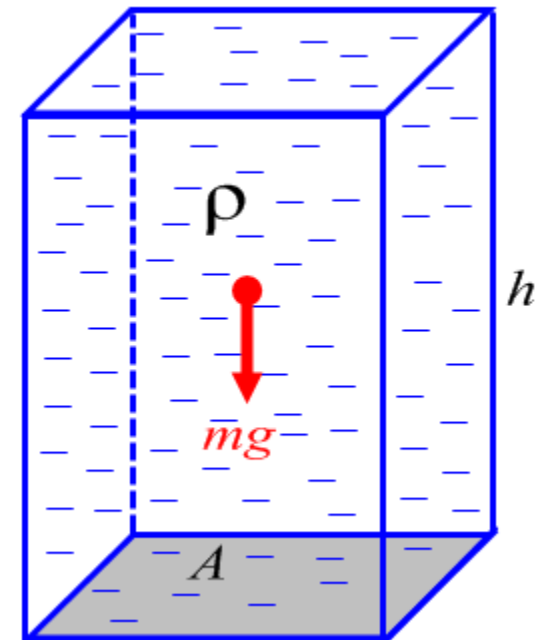
$$p = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{F_{\perp}(A)}{A} \quad \text{Mértékegysége: } [p] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa (Pascal)}$$

A **hidrosztatikai nyomás** a folyadék (h magasságú oszlop) súlyereje által okozott nyomás (egyenletesen oszlik el):

$$p = \frac{F_{\perp}(A)}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{V\rho g}{A} = \frac{Ah\rho g}{A} = h\rho g \quad \rho: \text{ sűrűség}$$

Mivel a folyadék alakja szabadon változhat, adott mélységben a nyugvó folyadék nyomása nem függ a felület irányításától, a kifejtett erő pedig mindig merőleges a felületre.

Pascal törvénye: Egynemű nyugvó folyadék azonos magasságú pontjaiban a nyomás azonos.



Felhajtó erő*

A **felhajtó erő** a folyadék által a test teljes felületére kifejtett eredő erő.

A téglatest alakú test lapjaira:

- elülső és hátsó eredője nulla
- bal oldali és jobb oldali eredője nulla
- alsó és felső eredője...

$$\begin{aligned}F_f &= F_{fel} - F_{le} = p_{lent}A - p_{fent}A = \\&= \rho_f g(h + c)A - \rho_f ghA = \rho_f gcA = \\&= \rho_f Vg = m_f g\end{aligned}$$

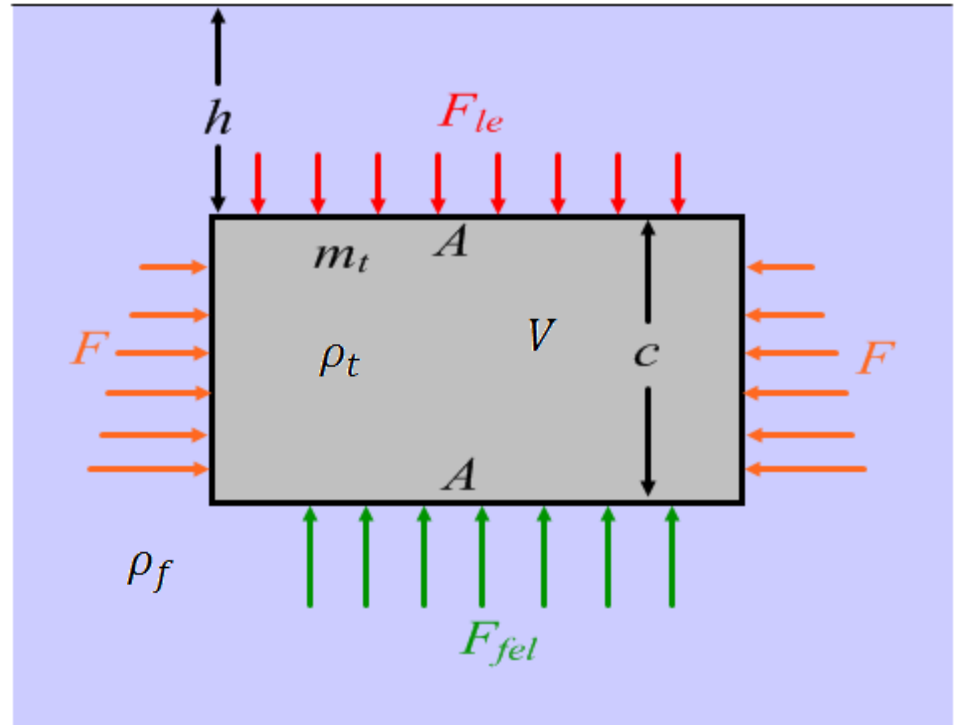
V a test által kiszorított folyadék térfogata, aminek tömege m_f

Tehát a felhajtó erő nagysága egyenlő a kiszorított folyadék súlyával. Ez más alakra is igaz.

Archimédész törvénye: Minden folyadékba mártott testre felhajtó erő hat, amely egyenlő a kiszorított (bemerülő rész által) folyadék súlyával.

Feladat: 8

Ha a test sűrűsége nagyobb mint a folyadéké akkor elmerül, mert a felhajtóerő kisebb mint a test súlya. Ha a folyadék sűrűsége nagyobb, akkor a test egy része nem merül el, a test úszik.



Felületi feszültség

Mosószeres vízbe mártott drótkeret oldalaira a kifeszült hártya összehúzó erőt fejt ki.

Az alsó d hosszúságú oldalra:

$$F = 2\alpha d \quad \text{ahol } \alpha \text{ a felületi feszültség.}$$

A kettes szorzó az elülső és hátulsó felületek miatt van (2 felület).

Feladat: 9

Ha az alsó oldal egy mozgatható rúd, amely s távolságot mozdul felfelé, a felület megváltozása:

$$\Delta A = -2ds \quad (2 \text{ oldal továbbra is})$$

A szappanhártya erejének munkája pedig:

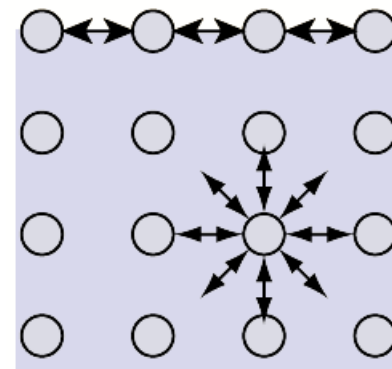
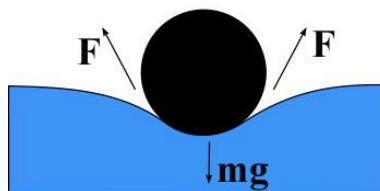
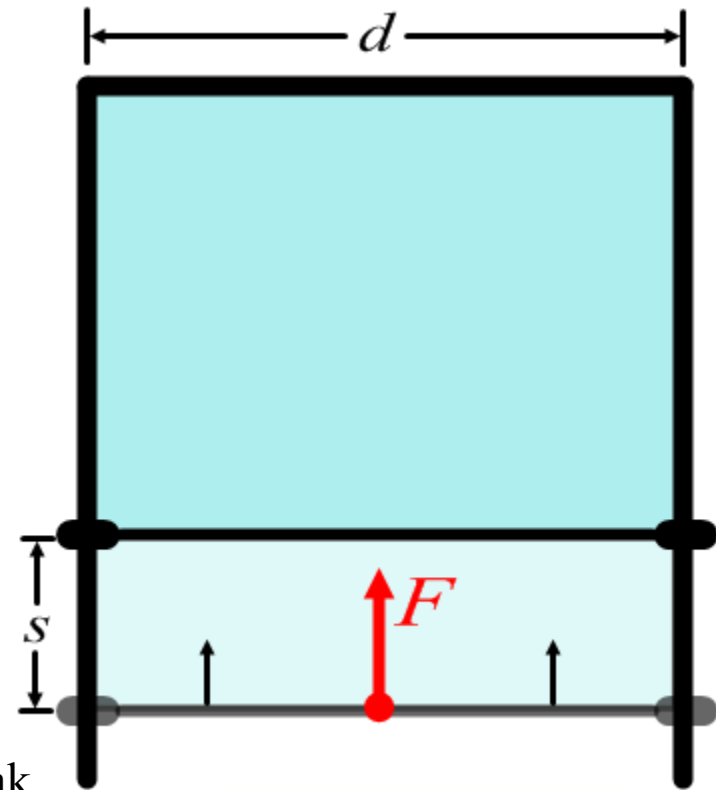
$$W = Fs = 2\alpha ds = -\alpha\Delta A$$

Mivel a munka a felületváltozással arányos, a folyadéknak a felületével arányos energiája van:

$$E = \alpha A$$

Ennek oka a molekulák közötti vonzó kölcsönhatásban rejlik.

A felületet igyekszik a folyadék minimalizálni: csepp alakja



Tömegmegmaradás

A **hidrodinamika** a folyadékok, mint kontinuumok áramlását leíró tudományág.

Kétféle tárgyalásmód:

1. Lagrange-módszer: az egyes kiszemelt folyadékreszekre a Newton féle mozgásegyenletet írjuk fel, és a kezdeti feltételeket használva megoldjuk.

2. Euler-féle leírás: a különböző pontokban az ott áramló folyadék tulajdonságait mérjük (pl. sebesség, nyomás, sűrűség).

Ha ezek időben állandóak minden pontban, akkor **stacionárius** áramlásról beszélünk.

Kontinuitási egyenlet: A tömeg megmaradó mennyiség, nem keletkezik, és nem tűnik el. Tekintsünk egy nyugvó V térfogatot, amelyet az A zárt felület határol. A dt idő alatt a dA elemi felületdarabon kiáramló tömeg: $dm = \rho dV = \rho dA v \cos \alpha dt = \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} dt$

Tehát időegység alatt: $\frac{dm}{dt} = \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$

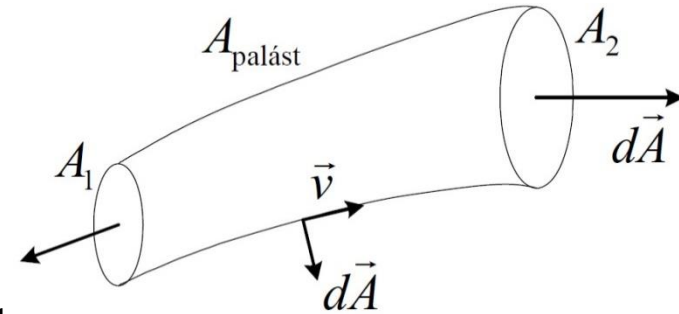
A V térfogatból a teljes A felületen keresztül időegység alatt kiáramló tömeg megegyezik a térfogatban lévő tömeg csökkenésével (negatív deriváltjával):

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \oint_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

Kontinuitási egyenlet

Stacionárius (időben állandó) áramlás: Minden idő szerinti derivált nulla.

$$0 = \oint_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \int_{A_2} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \int_{A_p} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

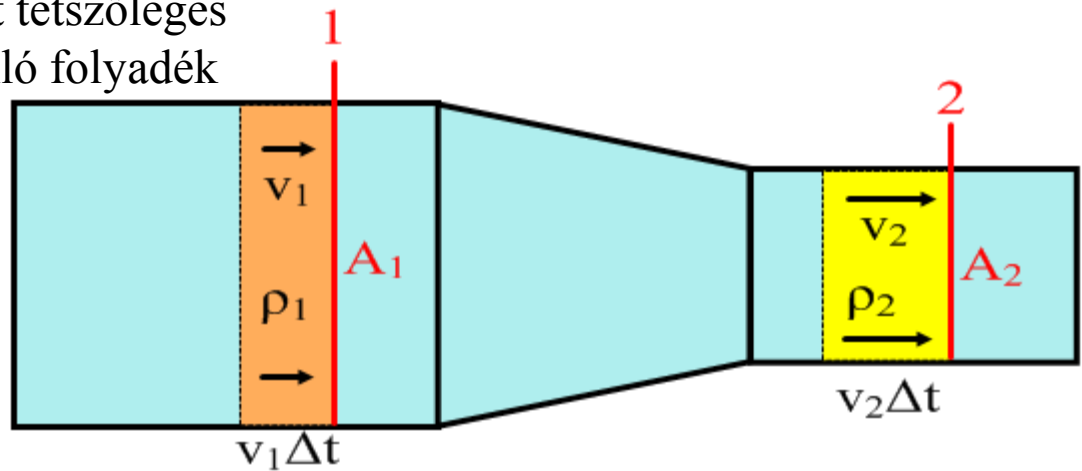


A palástra vett integrál nulla, mert a sebesség párhuzamos a felülettel. Tehát a két végen történő be- és kiáramlás ki kell, hogy ejtse egymást.

Ennek eredménye, hogy egy cső két tetszőleges helyén a keresztmetszeteken átáramló folyadék tömege megegyezik.

Az A_1 és A_2 keresztmetszetű helyekre Δt idő alatt:

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 \\ \rho_1 V_1 &= \rho_2 V_2 \\ \rho_1 A_1 v_1 \Delta t &= \rho_2 A_2 v_2 \Delta t \end{aligned}$$

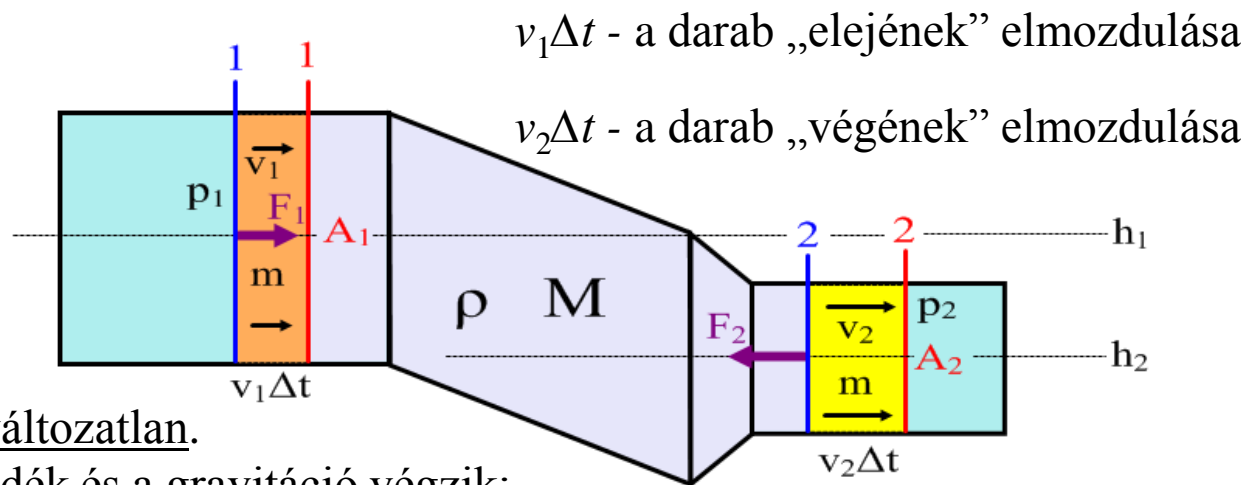


$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$ a **tömegáram** ugyanaz a cső mentén.

Összenyomhatatlan folyadéokra ($\rho_1 = \rho_2$): $A_1 v_1 = A_2 v_2$ a **térfogatáram** is ugyanaz a cső mentén.

Bernoulli egyenlet

Alkalmazzuk a $W = \Delta E_K$ munkatételt a h_1 magasságban lévő A_1 keresztmetszetű rész és a h_2 magasságban lévő A_2 keresztmetszetű rész között az $m + M$ tömegű összenyomhatatlan ρ sűrűségű folyadékdarabra, stacionárius áramlás esetén. Kis Δt idő alatt:



Az M tömegű közbülső rész változatlan.

A munkát a szomszédos folyadék és a gravitáció végzik:

$$W = W_f + W_g = F_1 v_1 \Delta t - F_2 v_2 \Delta t + mg(h_1 - h_2) = p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t + mg(h_1 - h_2) = \\ = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V + \rho \Delta V g (h_1 - h_2) = \Delta V (p_1 - p_2 + \rho g h_1 - \rho g h_2)$$

A kinetikus energia megváltozása: $\Delta E_K = E_{K2}(m) + E_K(M) - E_{K1}(m) - E_K(M)$

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \Delta V \left(\frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 \right)$$

Tehát:

$$p_1 - p_2 + \rho g h_1 - \rho g h_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 \rightarrow p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2$$

Bernoulli egyenlet - Példa*

Milyen sebességgel folyik ki egy vödör alján fúrt lyukon a víz, ha a vödörben h magasságig van víz?

Feltételezve, hogy a vízszint nagyon lassan csökken: $v_1 \approx 0$

A Bernoulli-egyenletet felhasználva:

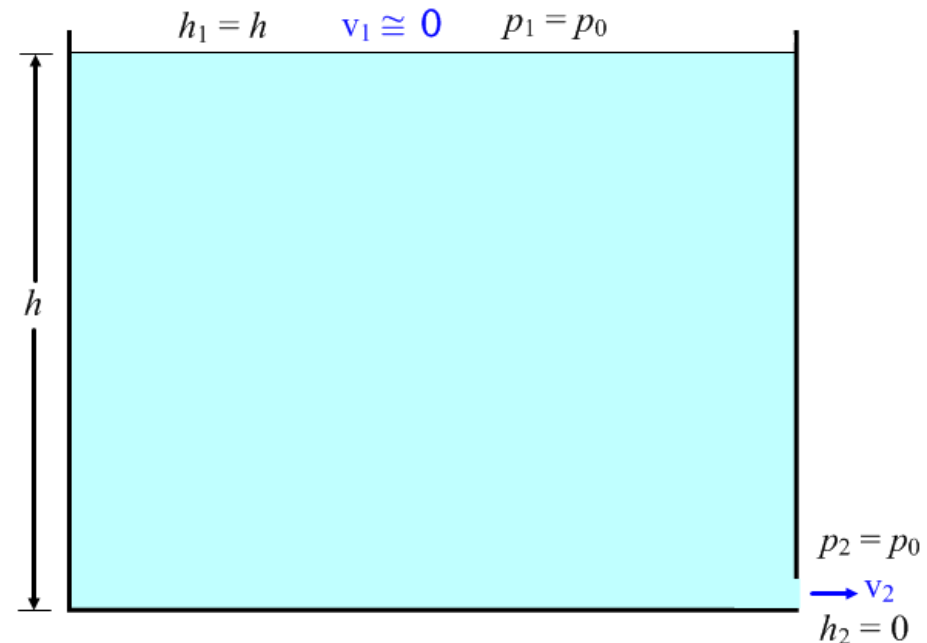
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

$$p_0 + 0 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + 0$$

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$2gh = v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$



A sebesség megegyezik azzal, amit egy h magasságból szabadon eső test érne el.

Feladat: 10

Termodinamika (Hötan)

Termodinamika

A **hőtan** nagyszámú részecskéből (pl. gázmolekulából) álló makroszkópikus rendszerekkel foglalkozik. A nagy számok miatt érdemes a **mólt** bevezetni, ami egy **Avogadro-számnyi** ($6,022 \cdot 10^{23}$ db) részecskét jelent (12-es tömegszámú szénatomok száma 12 gramm szénben).

Ennek megfelelően az atomi tömegegység a 12-es tömegszámú szénatom tömegének 1/12-ed része: $1 \text{ ATE} = 1,661 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

A végbemenő folyamatok **kvázisztatikusak**, a rendszert leíró mennyiségek a folyamat során minden pillanatban ki vannak egyenlítődvé (egyensúlyi állapotokon keresztüli „lassú” változás).

A rendszert leíró makroszkópikusan mérhető mennyiségek az **állapothatározók**.

Extenzív állapotthatározók: a rendszer egészére jellemzők, és több rendszer egyesítésekor ezek összeadódnak (pl. térfogat, részecskeszám, tömeg, energia).

Intenzív állapotthatározók: pontról pontra mérhetőek, több rendszer egyesítésekor ezek kiegyenlítődsre törekednek (pl. nyomás, hőmérséklet, sűrűség, energiasűrűség).

Fenomenologikus elmélet: leírás csak az állapotthatározókon keresztül.

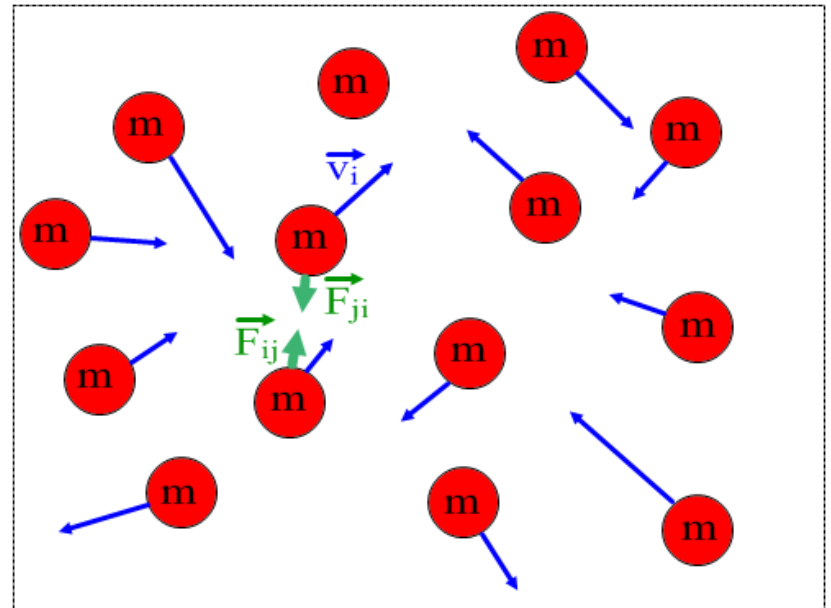
Statisztikus elmélet: a nagyszámú részecskére statisztikai törvényszerűségek alkalmazása.

Belső energia

A rendszer **belső energiája** a részecskék egymáshoz (rendszer tömegközéppontjához) képesti rendezetlen mozgásából származó **kinetikus energia** és a részecskék közötti Van der Waals kölcsönhatáshoz tartozó **potenciális energia**.

$$N \text{ db részecskére: } E_b = \sum_{i=1}^N E_{Ki} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E_{Pij}$$

Brown-mozgás: A kálium-permanganát (KMnO_4) oldódása vízben azt mutatja, hogy a víz részecskéi nagysebességgel ütköznek a festék rögöcskéikkel. A részecskéknek tehát sebességük, és így mozgási energiájuk van. Mivel számuk igen nagy, ez az energia jelentős.



Bizonyos esetekben a részecskék közötti kölcsönhatások (rugalmas ütközéseket leszámítva) elhanyagolhatók (ideális gázok), ekkor a második tag nulla.

Magasabb hőmérsékleten a mozgás intenzívebb, így a belső energia nagyobb.

Rendezett mozgás mechanikai energiája disszipáció során (pl. súrlódás, közegellenállás) belső energiává alakulhat, növelve a test hőmérsékletét

Térfogati munka

A **térfogati munka** a környezet által a gázon (rendszeren) végzett munka, miközben annak térfogata változik.

Egy könnyen mozgó dugattyún végzett elemi munka a környezet által, miközben azt dx távolsággal beljebb nyomja: δW

A szükséges erő p nyomású gáz esetén: $F = pA$.

Tehát az elemi munkára: $\delta W = pA dx$
Mivel $A dx = -dV$

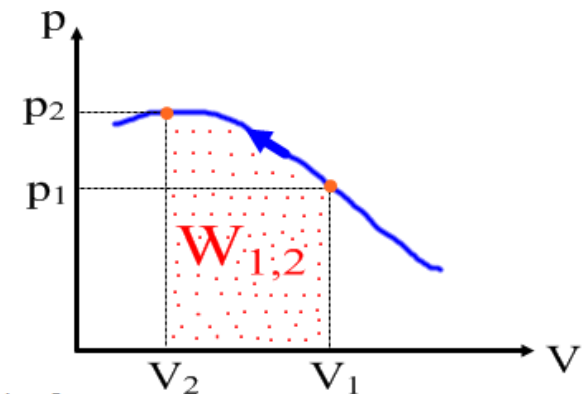
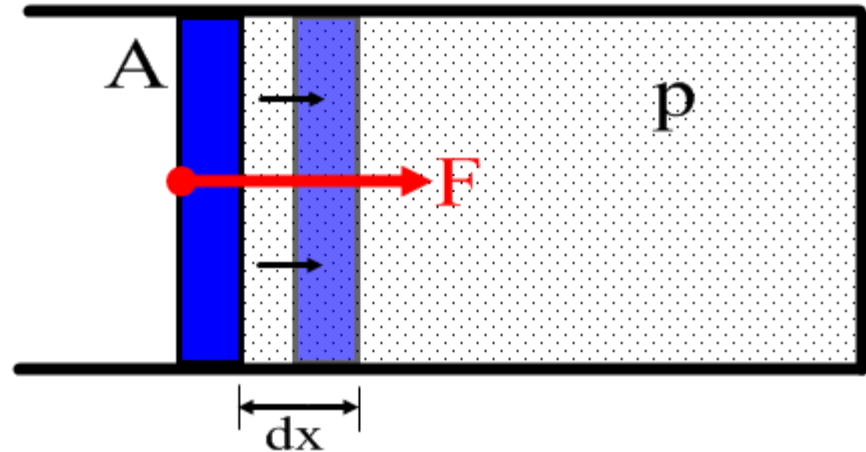
$$\delta W = -pdV$$

Eközben a gáz által végzett munka negatív, mert a gáz kifelé nyomja a dugattyút (az erő ellentétes az elmozdulás irányával): $\delta W^* = -\delta W$

Tágulás esetén viszont: $\delta W < 0$ és $\delta W^* > 0$

Egy véges térfogatváltozás esetén a

nyomás általában változik, ezért integrálni kell: $W_{1,2} = - \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV$
A munkát a p - V diagramon a görbe alatti terület reprezentálja.

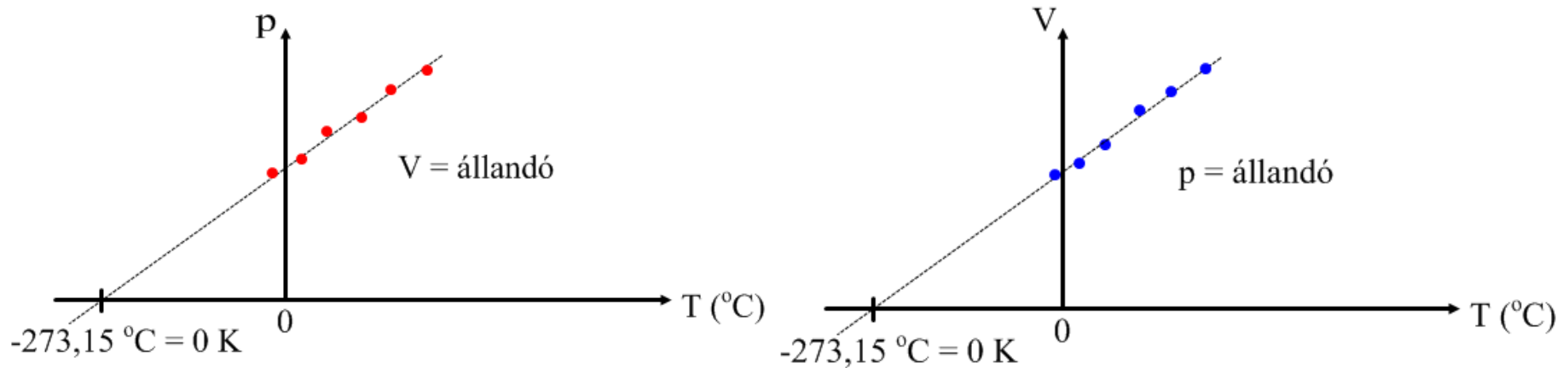


ha a nyomás állandó:
 $W_{1,2} = -p(V_2 - V_1)$

Abszolút hőmérsékleti skála

Ideális gáz térfogatát tanulmányozva állandó nyomáson, vagy nyomását tanulmányozva állandó térfogaton, mindkét esetben a hőmérsékletnek lineáris függvénye az eredmény.

A gáz térfogata illetve nyomása lineárisan nullához tart csökkenő hőmérséklet esetén.



Abszolút nulla: ahol a lineáris extrapoláció egyenese metszi a hőmérséklet tengelyt.

$T = -273,15\text{ °C} = 0\text{ K}$ (Kelvin) - A hőmérséklet SI mértékegysége.

Hőközlés

A test belső energiája úgy is nőhet, ha egy magasabb hőmérsékletű test energiát ad neki. Ez a makroszkopikus mozgás (munkavégzés) nélkül átadott energia a **hő**.

Jele: Q (az energia amit a rendszer a környezettől kap). Mértékegysége: J (Joule)

A rendszer (test, folyadék, gáz) által a környezetnek leadott energia pedig: $Q_{le} = -Q$

Hőközlés fajtái:

- **hővezetés** (a test anyagában vagy testek között érintkezés útján - pl. főzőlap)
- **konvekció** (a közeg áramlik és ezáltal az energiát is viszi magával - pl. központi fűtés)
- **hősugárzás** (mindenféle közeg nélkül, elektromágneses hullám formájában – pl. Nap)

Hőkapacitás: A rendszer hőmérsékletének 1 fokkal emeléséhez szükséges hő:

$$Q = C \cdot \Delta T \quad \text{Mértékegysége: } [C] = \text{J/K vagy J/}^\circ\text{C}$$

A hőkapacitás a rendszer egészét jellemzi, az anyagi minőségtől és mennyiségtől is függ.

Fajhő: a rendszer egységnyi tömegű részének hőkapacitása:

$$C = c \cdot m \quad \text{vagyis} \quad Q = c \cdot m \cdot \Delta T \quad \text{Mértékegysége: } [c] = \text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \text{ vagy } \text{J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$$

Mólhő: a rendszer egy mólnyi részének hőkapacitása:

$$C = c_M \cdot n \quad \text{ahol } n \text{ a mólok száma vagyis } Q = c_M \cdot n \cdot \Delta T$$

$$\text{Mértékegysége: } [c_M] = \text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K}) \text{ vagy } \text{J}/(\text{mol} \cdot ^\circ\text{C})$$

A fajhő és mólhő már csak az anyagi minőségtől függő mennyiségek!

A belső energia a rendszer egy állapotát jellemzi, míg a munka és a hő egy folyamatot.

A hőtan első főtétele

A **hőtan első főtétele** kimondja, hogy egy rendszer belső energiájának megváltozása egyenlő a **rendszerrel közölt hő** és a **rendszeren végzett munka** összegével:

$$\Delta E_b = Q + W$$

A munka a környezet által végzett térfogati munka.

A hő a környezettől kapott hő (lehet például súrlódás által disszipált mechanikai energia).

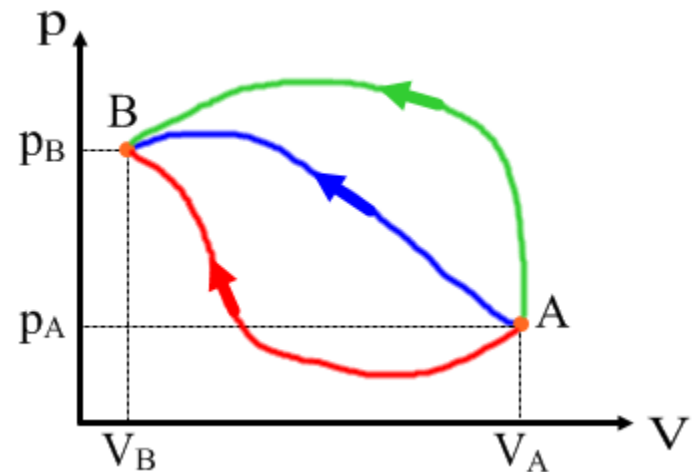
Mivel a belső energia a rendszer állapotára jellemző mennyiség, annak megváltozása egy A és B állapotok között nem függ attól, hogy milyen folyamat során történt a változás:

$$\Delta E_b = E_b(B) - E_b(A)$$

Bármilyen körfolyamat (A -ból kezdve és A -ban végződve) során természetesen:

$$\Delta E_b = E_b(A) - E_b(A) = 0$$

A tétel differenciális alakja: $dE_b = \delta Q + \delta W$

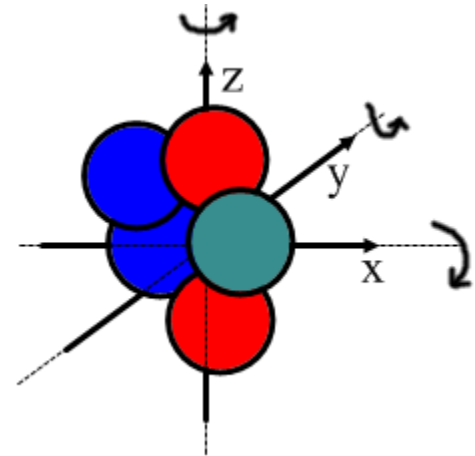
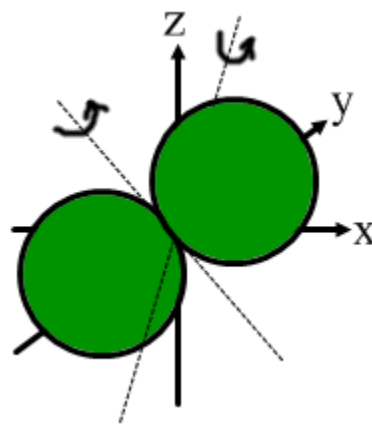
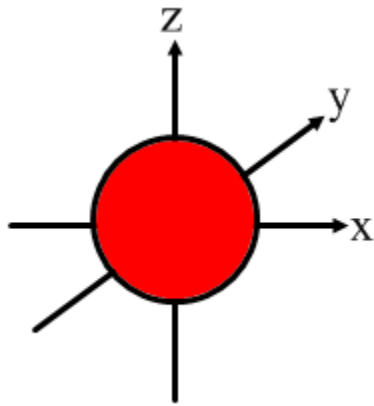


Kinetikus gázelmélet (ideális gázok)

Ekvipartíció tétele

Kinetikus gázelmélet: Az ideális gáz nagyszámú, kisméretű részecskéből áll, amelyek időnként egymással és az edény falával ütköznek, de ezt leszámítva más kölcsönhatás nem lép fel közöttük. A részecskék mérete elhanyagolható a rendelkezésre álló térfogathoz képest.

Szabadsági fokok száma: (f) – Az egymástól független energiatárolási módok.
pl. mozgás x irányban, y irányban, z irányban (egyatomos gáz esetén) – $f = 3$ (1 részecskére!)
kétatomos molekulák a hossz tengelyükre merőleges két tengely körül foroghatnak – $f = 5$
sokatomos molekulák három egymásra merőleges tengely körül foroghatnak – $f = 6$



Ekvipartíció tétele: Egyensúlyi rendszerben, egy adott hőmérsékleten minden rendelkezésre álló szabadsági fokra időátlagban jutó ε_f energia megegyezik.

Egy részecske egy szabadsági fokára: $\varepsilon_f = \frac{1}{2} kT$ $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ (Boltzmann-állandó)

Ideális gáz belső energiája

Ha az egy szabadsági fokra jutó energia átlagban $\varepsilon_f = \frac{1}{2}kT$, akkor egy részecskére átlagban

$$\bar{\varepsilon} = f \cdot \varepsilon_f = f \cdot \frac{1}{2}kT = \frac{f}{2}kT \text{ energia jut.}$$

Ha a rendszer N db részecskéből áll, akkor a belső energia ennek egyszerűen az N -szerese:

$$E_b = \frac{f}{2}NkT = \frac{f}{2}nRT \quad \text{ahol } n = N / N_A \text{ és } R = kN_A$$

n : a mólok száma N_A : az Avogadro-szám $R = 8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ az egyetemes gázállandó.

A belső energia tehát csak a hőmérséklettől függ (adott mennyiségű és típusú gáz esetén).

Annak a testnek magasabb a hőmérséklete, ahol az egy szabadsági fokra jutó energia több.

A belső energia megváltozása tehát: $\Delta E_b = \frac{f}{2}Nk\Delta T = \frac{f}{2}nR\Delta T$

Ideális gázok állapotegyenlete*

Állapotegyenlet: Ideális gáz minden állapotában, az állapothatározók között érvényes a következő összefüggés:

$$pV = NkT \quad \text{vagy} \quad pV = nRT$$

Ennek felhasználásával a belső energia: $E_b = \frac{f}{2}NkT = \frac{f}{2}nRT = \frac{f}{2}pV$

Abban az esetben, ha a gáz mennyisége állandó ($N =$ állandó, vagy $n =$ állandó), az állapotegyenletből megkapjuk az **egyesített gáztörvényt**.

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

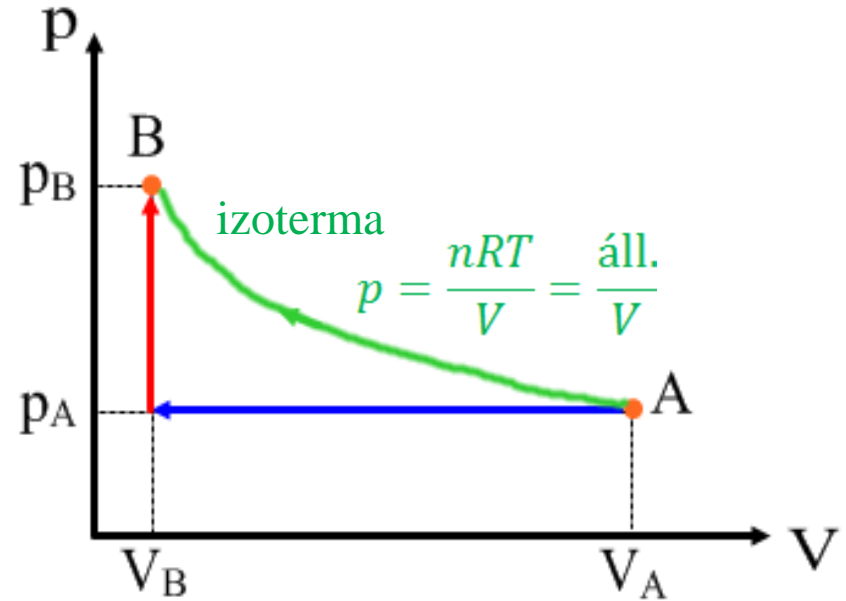
Ideális gázok speciális állapotváltásai*

Gáz mennyisége mindig adott, tehát $n = \text{áll!}$

- izobár: a nyomás is állandó ($pV = nRT$)
($V/T = \text{áll.}$ $W = -p\Delta V = -nR\Delta T$)

- izochor: a térfogat is állandó ($pV = nRT$)
($p/T = \text{áll.}$ $W = 0$)

- izoterm: a hőmérséklet is állandó ($pV = nRT$)
($pV = \text{áll.}$)



Feladat: 11

$$\begin{aligned}\delta W &= -pdV \\ W &= - \int_{V_1}^{V_2} pdV = -nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -nRT [\ln V]_{V_1}^{V_2} = \\ &= -nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = nRT \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right) = p_1 V_1 \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)\end{aligned}$$

- adiabatikus: a közölt hő nulla $Q = 0$ (később...)

Izobár és izochor mólhő

A belső energia megváltozása izochor folyamat esetén ($V = \text{állandó}$, így $W = 0$):

$$Q = c_{MV} n \Delta T \quad \Delta E_b = \frac{f}{2} n R \Delta T = Q \quad \text{izochor mólhő: } c_{MV} = \frac{f}{2} R$$

A belső energia megváltozása izobár folyamat esetén:

$$\Delta E_b = \frac{f}{2} n R \Delta T = Q + W = Q - p \Delta V = Q - n R \Delta T$$

$$\frac{f}{2} n R \Delta T + n R \Delta T = Q$$

$$Q = c_{Mp} n \Delta T \quad Q = \left(\frac{f}{2} + 1 \right) n R \Delta T \quad \text{izobár mólhő: } c_{Mp} = \left(\frac{f}{2} + 1 \right) R$$

A két mólhő hányadosa (fajhők hányadosa) az **adiabatikus kitevő**:

$$\kappa = \frac{c_{Mp}}{c_{MV}} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\frac{f}{2} + 1}{\frac{f}{2}} = \frac{f + 2}{f} \quad \kappa = \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{4}{3}$$

Adiabatikus állapotváltozás

A folyamat során a hőátadás nulla: $Q = 0 \rightarrow \Delta E_b = W$

A belső energia megváltozása: $dE_b = \delta W \rightarrow \frac{f}{2} nRdT = -pdV$

Mivel: $nRT = pV \rightarrow nRdT = pdV + dpV$

$$\frac{f}{2} (pdV + dpV) = -pdV$$

$$\frac{f}{2} pdV + pdV = -\frac{f}{2} Vdp$$

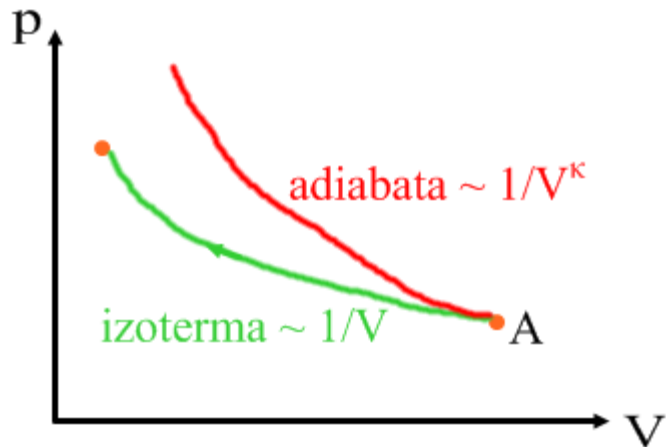
$$\left(\frac{f}{2} + 1\right) \frac{dV}{V} = -\frac{f}{2} \frac{dp}{p}$$

$$\kappa \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p} \rightarrow \kappa \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}$$

$$\kappa \cdot [\ln V]_{V_1}^{V_2} = -[\ln p]_{p_1}^{p_2}$$

$$\kappa \cdot \ln \left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \ln \left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\kappa = \frac{p_1}{p_2}$$



Poisson-egyenlet: $p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa$

További Poisson-egyenletek *

Adiabatikus folyamatra kaptuk az első egyenletet: $p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa$

Felhasználva az állapotegyenletet, kapjuk a második Poisson-egyenletet:

$$pV = nRT \rightarrow pV^\kappa = nRTV^{\kappa-1}$$
$$nRT_1 V_1^{\kappa-1} = nRT_2 V_2^{\kappa-1}$$

Egyszerűsítve nR -el: $T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}$

Kifejezve V -t az állapotegyenletből: $V = \frac{nRT}{p}$

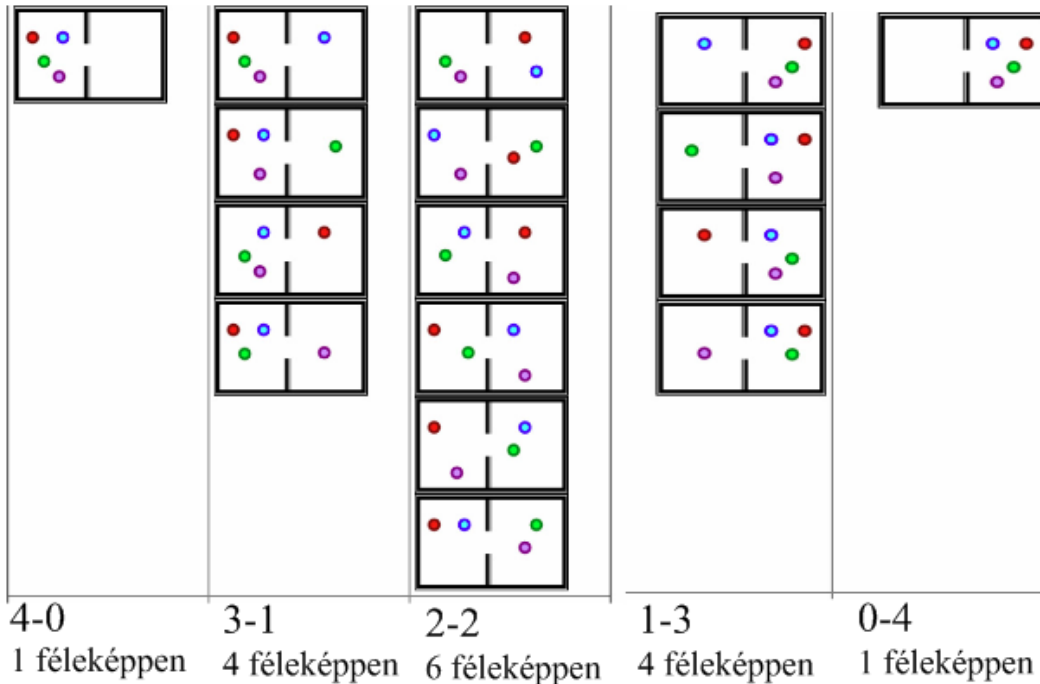
Behelyettesítve az első Poisson egyenletbe: $p_1 \left(\frac{nRT_1}{p_1} \right)^\kappa = p_2 \left(\frac{nRT_2}{p_2} \right)^\kappa$

Egyszerűsítve $(nR)^\kappa$ -al és reciprokokat véve kapjuk a harmadik Poisson egyenletet:

$$\frac{p_1^{\kappa-1}}{T_1^\kappa} = \frac{p_2^{\kappa-1}}{T_2^\kappa}$$

Mikroállapotok, állapotösszeg, entrópia *

A rendszer egy makroszkopikusan mérhető és megkülönböztethető állapotát többféle mikroszkopikus elrendeződés (általunk nem észlelhető mikroszkopikus különbségeket, pl. két ugyanolyan atom felcserélése a tartályban, is figyelembe vevő állapot) is létrehozhatja.



Példa 4 db ugyanolyan részecskével:

mikroállapot:

melyik részecske melyik oldalon

makroállapot:

hány részecske egy oldalon

állapotösszeg: Y

egy makroállapothoz

tartozó mikroállapotok száma

(hányféleképpen valósulhat meg)

Már 4 db részecskénél is látható, hogy a legvalószínűbb elrendeződés az egyenlően eloszló részecskéket jelenti. Ez óriási számú részecskék esetén sokkal dominánsabb.

Entrópia (rendezetlenség): $S = k \ln Y$ $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K (Boltzmann-állandó)

Ha a rendszer T hőmérsékleten δQ hőt kap, akkor az entrópiájának megváltozása:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

Körfolyamatok

A körfolyamatok közös tulajdonsága, hogy bármennyi és bármilyen részfolyamatokból is álljanak, a ciklus végén a rendszer (gáz, munkaközeg) visszakerül a kiindulási állapotba. Mivel a belső energia (E_b) és az entrópia (S) mennyiségeket a rendszer állapota határozza meg, azok értéke a ciklus végén szintén ugyanannyi lesz, mint az elején.

Ebből az következik, hogy a teljes ciklusra a belső energia változása és az entrópia változása zérus. A részfolyamatokban ezek a mennyiségek úgy változnak meg, hogy a teljes ciklusra a változások összege nullának adódik:

$$\Delta E_{bO} = \Delta E_{b1} + \Delta E_{b2} + \dots + \Delta E_{bn} = 0 \quad \text{és} \quad \Delta S_O = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots + \Delta S_n = 0$$

Az O karakter az alsó indexben ΔE_{bO} és ΔS_O esetén a teljes körfolyamatra (ciklusra) vett értéket jelöli.

A **hőtan első főtételét** minden részfolyamatra felírhatjuk, tehát ezen egyenleteket összeadva a teljes ciklusra is nyugodtan írhatjuk, hogy

$$0 = \Delta E_{bO} = Q_O + W_O \rightarrow Q_O = -W_O$$

Itt a Q_O mennyiség a rendszer (gáz, munkaközeg) által **kapott nettó hő** a ciklus során:

$$Q_O = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

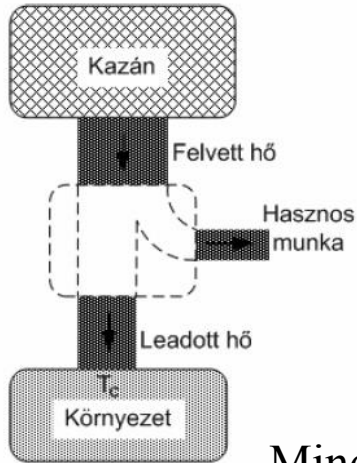
A W_O mennyiség pedig a **rendszeren végzett nettó munka** a ciklus során:

$$W_O = W_1 + W_2 + \dots + W_n$$

A **gáz által** a ciklus során **leadott** hőre természetesen: $Q_{leO} = -Q_O$

A **gáz által** a ciklus során **végzett** munkára pedig: $W_{gO} = -W_O$

Hőerőgép - Feladat: 12



A hőtan I. főtételéből továbbra is: $0 = \Delta E_{b0} \rightarrow Q_0 = -W_0 = W_{g0}$
 Ennek, vagyis az energiamegmaradás törvényének megfelelően, a munkaközeg a kazántól (meleg hőtartálytól) felvett hő és a környezetnek (vagy hideg hőtartálynak) leadott hő különbségeként adódó nettó felvett hőnek megfelelő hasznos munkát végez minden ciklus alatt (lásd ábra):

$$W_{g0} = W_{hasz} = Q_{felv} - Q_{lead} = Q_0$$

Mind a meleg, mind a hideg hőtartály hőkapacitását végtelennek tekintjük, tehát azok hőmérséklete végig állandó.

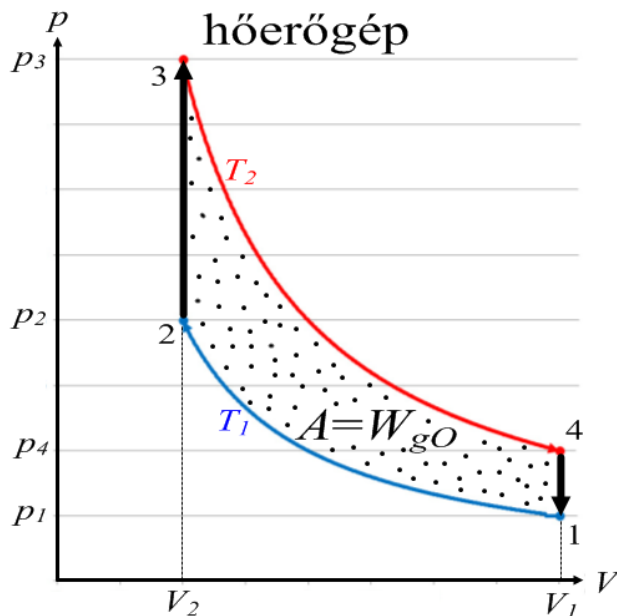
Tehát a hőerőgép a felvett hőt alakítja mechanikai munkavégzéssé, valamilyen η hatásfokkal:

$$\eta = \frac{W_{hasz}}{Q_{felv}} = \frac{Q_{felv} - Q_{lead}}{Q_{felv}} = 1 - \frac{Q_{lead}}{Q_{felv}}$$

Ezen az egyszerű példán egy T_1 hőmérsékleten végzett izoterm kompresszió, egy V_2 térfogaton végzett izochor melegítés, egy T_2 hőmérsékleten zajló izoterm expanzió, és egy V_1 térfogaton történő izochor hűlés alkotja a ciklust. Látható, hogy a hasznos munka két részből tevődik össze:

$$W_{hasz} = W_{g12} + W_{g34}$$

Az első tag negatív, abszolút értéke pedig az 1-es izoterma alatti terület. A második tag pozitív, értéke a 2-es izoterma alatti terület. Tehát a **bezárt terület** megadja a hasznos munkát. Ez tetszőleges hőerőgép körfolyamatára igaz, nem csak itt!



Hűtőgépek, hőszivattyúk

A hőtan I. főtételéből itt is: $0 = \Delta E_{bO} \rightarrow Q_O = -W_O \rightarrow Q_{leO} = W_O$

Ennek, vagyis az energiamegmaradás törvényének megfelelően, a munkaközeg a hideg hőtartálytól hőt von el és azt, valamint a motor által a ciklus közben rajta végzett nettó munkából származó energiát hő formájában leadja a meleg hőtartálynak minden ciklus alatt (lásd ábra):

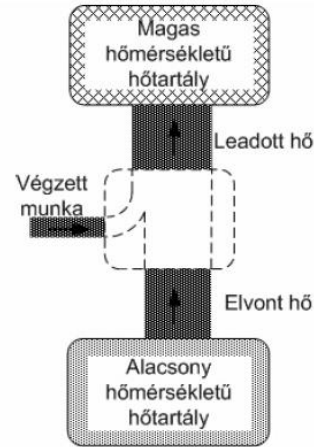
$$Q_{lead} = Q_{elv} + W_O \quad \text{ahol a nettó leadott hő: } Q_{leO} = Q_{lead} - Q_{elv}$$

A meleg és hideg hőtartály hőkapacitását itt is végtelennek tekintjük.

A hűtőgép és hőszivattyú működési elve ugyanaz, de a feladatuk különböző.

A hűtőgépnél a kívánatos folyamat a hő elvonása a hideg tartálytól (hűtő).

A hőszivattyúnál a kívánatos folyamat a hő leadása a meleg hőtartálynak (pl. fűtendő szoba).



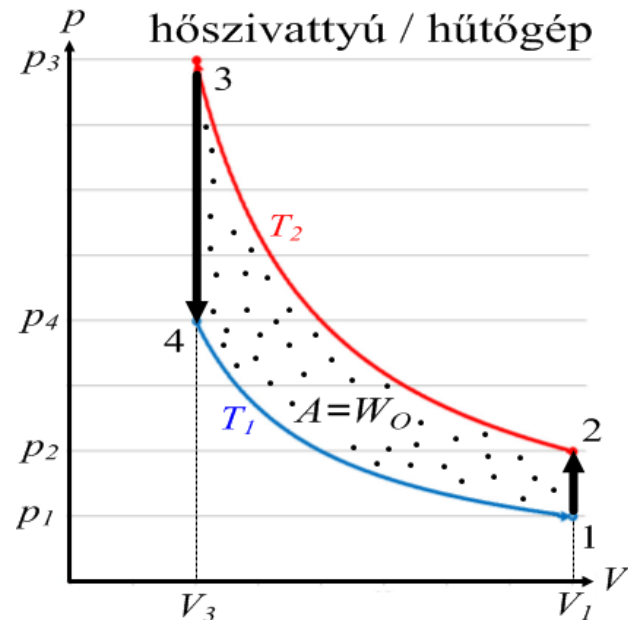
Itt hatásfok helyett jósági tényezőket tudunk definiálni.

$$\text{Hűtőgép: } q_{hg} = \frac{Q_{elv}}{W_O} = \frac{Q_{elv}}{Q_{lead} - Q_{elv}}$$

$$\text{Hőszivattyú: } q_{hsz} = \frac{Q_{lead}}{W_O} = \frac{Q_{lead}}{Q_{lead} - Q_{elv}}$$

A körfolyamat állapotai ugyanazok, mint az előző dián a hőerőgépnél, de **fordított** irányban megyünk végig rajtuk. Ezért a motor által végzendő nettó munka lesz pozitív, és ez fog most megegyezni a görbe által bezárt területtel:

$$W_{motor} = W_O = W_{23} + W_{41} \quad W_{23} > 0 \quad W_{41} < 0$$



A hőtan második főtétele

Vannak olyan folyamatok amik nem megfordíthatók, **irreverzibilisek**.
példák:

- hővé alakult mozgási energia nem alakul vissza
- összetört pohár nem pattan épségben vissza
- üres részhez nyitott gáz molekulái nem fognak mind visszajönni az eredeti kamrába



Ezeket a folyamatokat a fizika törvényei nem tiltják, viszont elenyésző a valószínűségük. Ezért statisztikailag kimondható, hogy a folyamatok csak olyan irányba mehetnek végbe, amivel **a rendezetlenség nő**. A rendezetlenség mértéke az **entrópia**. Lokálisan csökkenthető az entrópia, de csak annak árán, ha máshol viszont nő. A világegyetem entrópiája tehát folyamatosan nő.

Hőtan második főtétele: nem lehet olyan gépet készíteni, amely egyetlen tartály lehűlése árán munkát végezne (kell egy hideg tartály is). Ez a **másodfajú örökmozgó**.

Másik megfogalmazás: Zárt rendszer entrópiája sohasem csökkenhet.

$$\Delta S \geq 0$$

Megfordítható folyamatok esetén a rendezetlenség változatlan.
pl. rugalmas ütközés, adiabatikus állapotváltozás

Carnot ciklus

A Carnot ciklus egy olyan körfolyamat, amely két izoterm és két adiabatikus folyamatból áll.

A grafikon a hőerőgép irányát mutatja: $\eta = \frac{W_{hasz}}{Q_{felv}} = \frac{Q_{felv} - Q_{lead}}{Q_{felv}} = 1 - \frac{Q_{lead}}{Q_{felv}}$

A ciklusra a teljes entrópiaváltozás nulla. A két adiabatikus folyamat során az entrópia nem változik, izoterm folyamatoknál pedig állandó a hőmérséklet, tehát:

$$0 = \Delta S_O = \Delta S_{23} + \Delta S_{41} = \frac{Q_{23}}{T_2} + \frac{Q_{41}}{T_1} = \frac{Q_{felv}}{T_2} - \frac{Q_{lead}}{T_1}$$

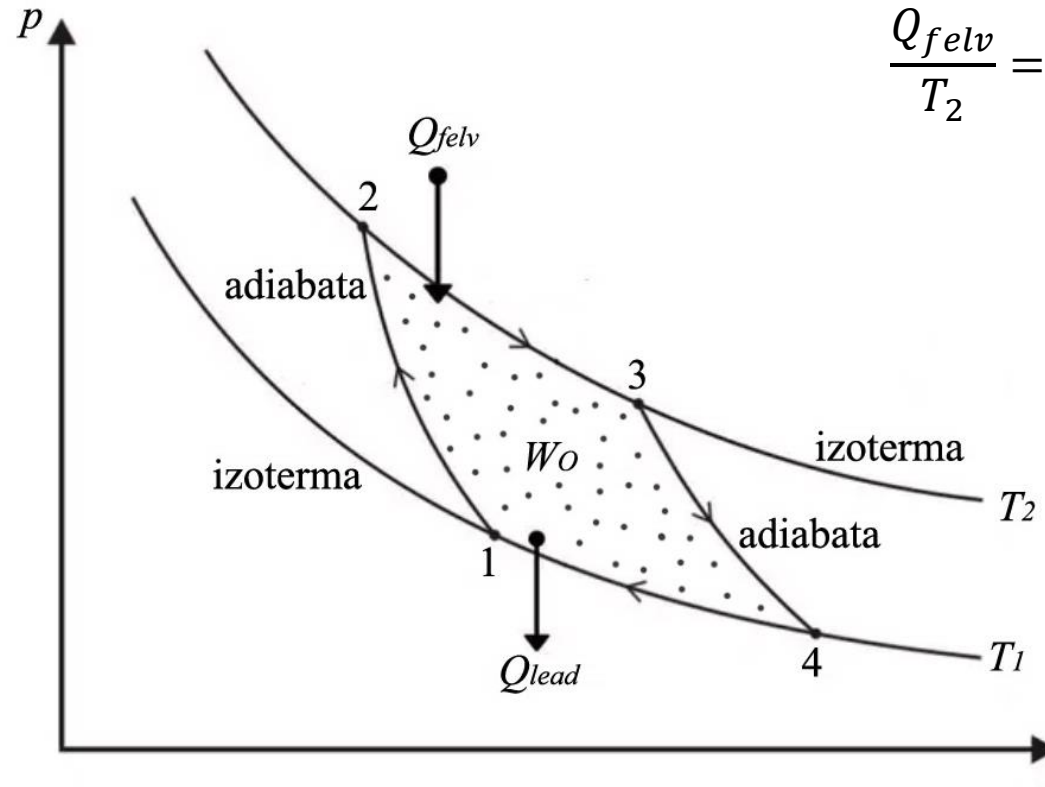
$$\frac{Q_{felv}}{T_2} = \frac{Q_{lead}}{T_1} \quad \rightarrow \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_{lead}}{Q_{felv}}$$

Ezzel a hőerőgép hatásfokára:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{lead}}{Q_{felv}} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

A Carnot ciklus adja a lehető legnagyobb hatásfokot, de látható, hogy ez is egynél biztosan kisebb!

A cikluson fordított irányban körbe haladva hűtőgépet/hőszivattyút kapunk. A munkák és hők előjele ekkor megváltozik, de az abszolút értéküket tekintve ugyanazok lesznek.



Valódi anyagok

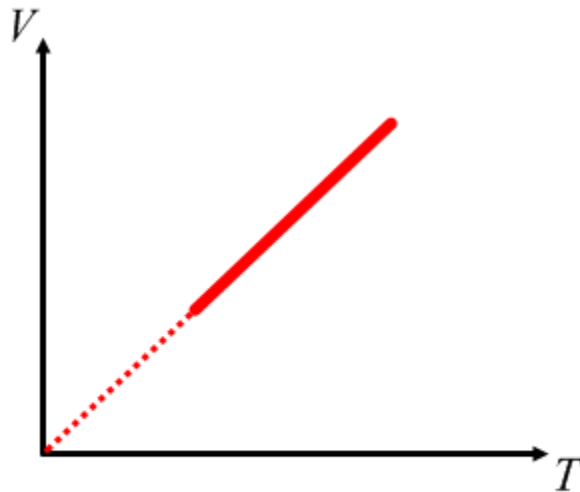
Valódi anyagok és ideális gázok összehasonlítása

Ideális gázokra állandó nyomáson: $pV = nRT$

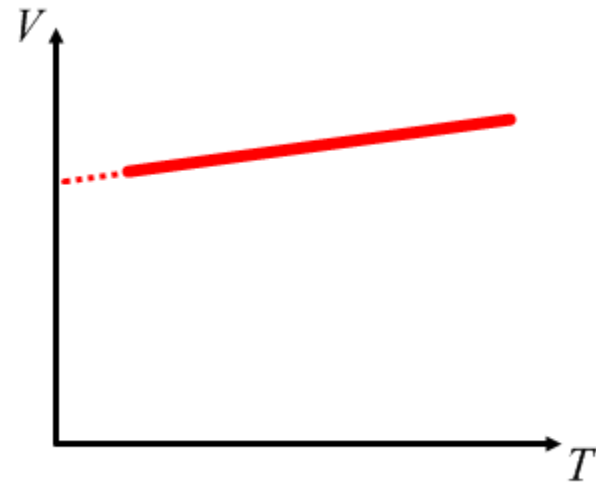
$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

Abszolút nulla felé közeledve a térfogat nullához tart.

Természetesen ez nem következik be, mert alacsony hőmérsékleten az ideális gáz közelítés nem érvényes.



ideális gáz



szilárd test

Reális gázok Van der Waals állapotegyenlete

Valóságos gázok nyomása és térfogata nem tart nullához a hőmérséklettel.

A részecskék által elfoglalt térfogat nem elhanyagolható. 1 mol részecske térfogata: b
Egymáshoz közel kerülő részecskék között vonzóerő hat, ami a nyomást csökkenti.

A Van der Waals állapotegyenlet 1 mol gázra ($v = V/n$):

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$$

Reális gázoknál a potenciális energia is hozzájárul a belső energiához.

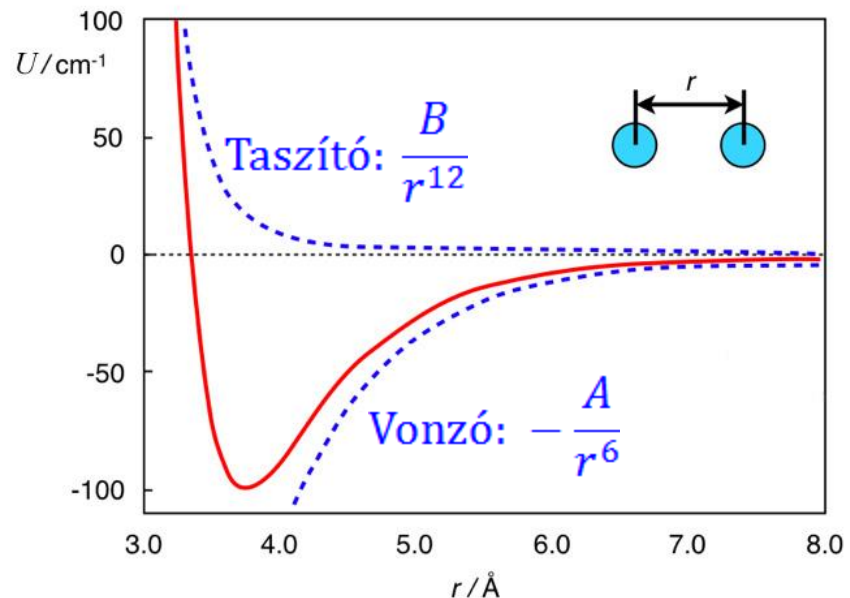
Növekvő térfogat esetén a részecskék távolabb kerülnek, nő a potenciális energia.
Tehát a belső energia nem csak a hőmérséklettől függ, hanem a térfogattól is.

Van der Waals kölcsönhatás
potenciális energiája:

$$U = -\frac{A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}$$

Lennard-Jones féle empirikus
formula.

A befolyásolja a -t, B pedig b -t



Hőtágulás*

Lineáris hőtágulás kis hőmérsékletváltozás esetén: $\Delta h = \alpha h_1 \Delta T$ h_1 : a rúd eredeti hossza

Tehát az új hossz: $h_2 = h_1(1 + \alpha \Delta T)$

A hőtágulás oka a potenciál aszimmetriája:
a lehetséges távolságok átlaga a
nagyobb értékek felé tolódik el ($r_2 > r_0$).

Térfogati hőtágulás: h_1 oldalélű kocka

Kezdeti térfogat $V_1 = h_1^3$, az új $V_2 = h_2^3$

Felhasználva a lineáris hőtágulás törvényszerűségét:

$$V_2 = h_2^3 = h_1^3 (1 + \alpha \Delta T)^3 = h_1^3 (1 + 3\alpha \Delta T + 3\alpha^2 \Delta T^2 + \alpha^3 \Delta T^3) = h_1^3 (1 + 3\alpha \Delta T)$$

$\alpha \Delta T$ kicsi, így a magasabb rendű tagok elhagyhatók

$$V_2 = V_1 (1 + \beta \Delta T)$$

$\beta = 3\alpha$ β : térfogati hőtágulási együttható

Érvényes bármely izotróp szilárd testre és folyadékokra. folyadékokra: $\beta \sim 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

Vízre pl. nem, mert annak térfogata minimális 4 °C-on (hűtve is tágul!)

