KOVÁCS ENDRE, PARIPÁS BÉLA,

FIZIKA I.

1

Új Magyarország
FEJLESZTÉSI TERV

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

I. KINEMATIKA

1. BEVEZETÉS, ALAPFOGALMAK

A kinematika a mozgás matematikai leírása, az ok feltárása nélkül. Tekintsünk a továbbiakban tömegpontokat. A tömegpont olyan test, melynek jellemző méretei kicsik a pálya méreteihez képest. Egy tömegpont vagy bármely test helyzetét és helyzetváltozását is csak más (esetleg képzeletbeli) testekhez viszonyítva jellemezhetjük, vagyis minden mozgás viszonylagos, relatív. A mozgás leírásához választani kell egy vonatkoztatási rendszert: matematikailag ez egy koordináta-rendszert jelent. A tömegpont helyzetét egy adott *t* időpillanatban egy helyvektorral jellemezzük, ami a vonatkoztatási rendszer origójából a tömegponthoz húzott vektor: $\vec{r}(t)$.

Az **elmozdulás** a t_1 és a t_2 időpillanat között: $\Delta\vec{r}_{1,2} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$, ez is vektormennyiség.

Sebesség: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, azt jellemzi, milyen gyorsan változik a helyvektor (az irány és a nagyság is fontos!), pontosabban a helyvektor változási gyorsasága, vagyis idő szerinti deriváltja

Gyorsulás: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, a sebességvektor változási gyorsasága, azaz idő szerinti deriváltja.

Ezekből az összefüggésekből leolvasható, hogy a sebesség-idő függvény a gyorsulás-idő függvényből integrálással kapható meg. Bármely t_1 időpillanatban a sebesség:

$$\vec{v}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t)\,dt + \vec{v}(t_0) \text{ ,}$$

a hely-idő függvény pedig ebből további integrálással adódik. Bármely t_1 időpillanatban a helyvektor:

$$\vec{r}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t)dt + \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt'\right)dt + \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}_0(t)dt + \vec{r}(t_0)$$

A megtett **út** - amely a mozgás során leírt pályavonal hosszát jelenti (tehát *skalár*, és nem vektormennyiség) - kiszámításánál is a sebesség fontos, az viszont mindegy, milyen irányban halad a test. Tegyük fel, hogy a vonat 80km/h-val halad, ekkor mindegy, hogy észak felé megy egy órát, vagy kelet felé, a megtett út úgyis 80km lesz, tehát **csak a sebességvektor nagysága számít, vagyis csak az abszolút-értékét kell integrálni**. Tehát az **út** kiszámításának módja:

$$s_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)|\,dt \text{ .}$$

SZÁMOLÁSI FELADAT

FELADAT

Két ember megy egymással szemben 96 m távolságból. Az egyik sebessége 1,2 m/s, a másiké 2 m/s. Egy légy röpköd az egyik ember orráról a másikéra 5 m/s sebességgel. Mennyi utat tesz meg a légy, míg a két ember találkozik?

Megoldás: Ki lehet számolni, hogy mennyi utat tesz meg a légy, amíg először, másodszor, stb. fordul a két ember között, aztán meg lehet próbálni összegezni a kapott végtelen sort. Sokkal egyszerűbb azonban, ha észrevesszük, hogy a légy *pontosan annyi ideig* repül, amennyi ahhoz kell, hogy az emberek találkozzanak. Erre az ismeretlen t_{tal} időtartamra az alábbi egyenletet lehet felírni:

$$1,2\frac{m}{s}\cdot t_{tal}+2\frac{m}{s}\cdot t_{tal}=96m$$

A baloldalon a t_{tal}-t kiemelve látható, hogy csak a két sebesség összege számít. A két ember találkozásáig $t_{tal}=30s$ telik el, ez alatt a légy

$$s=v_{légy}\cdot t_{tal}=150m$$

utat tesz meg.

2. Koordináta rendszerek és egyszerű mozgások

Derékszögű Descartes koordináta rendszer

René Descartes (1596-1650) francia filozófus, természetkutató és matematikus volt. **[i]**

Koordináták: x, y, z; Ezek az adott pontot jellemzik. Ha a pont mozog, általában függnek az időtől.

Egységvektorok: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, merőlegesek egymásra, egységnyi hosszúak, jobbsodrású rendszert alkotnak. Ezek a koordináta-rendszert jellemzik, nem függnek az időtől. A pont helye a *t* időpillanatban:

$$\vec{r}(t)=x(t)\,\vec{i}+y(t)\,\vec{j}+\ z(t)\,\vec{k},$$

tehát pl. az *x* koordináta adja az $\vec{i}$ irányban az origótól mért távolságot. A Pitagorasz-tétellel kapjuk, hogy $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ és pl. $x=\sqrt{r^2-y^2-z^2}$.

A sebesség: $\vec{v}(t)=\dot{x}\,\vec{i}+\dot{y}\,\vec{j}+\dot{z}\,\vec{k}$, ebből a *sebesség nagysága*: $v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$. A változó fölé tett pont idő szerinti deriválást jelöl, tehát $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ a sebességvektor koordinátái.

A gyorsulás: $\vec{a}(t)=\ddot{x}\,\vec{i}+\ddot{y}\,\vec{j}+\ddot{z}\,\vec{k}$, ebből a *gyorsulás nagysága*: $a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}$

Példa

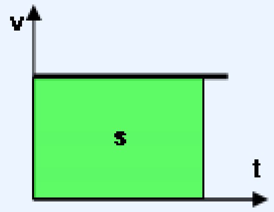
Példa 1. – Egyenes vonalú egyenletes mozgás

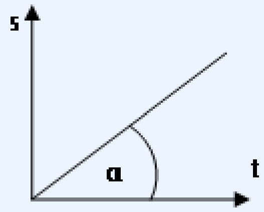
A sebességvektor állandó, a pálya egyenes, ezért egy dimenzióban tárgyaljuk.

A gyorsulás nulla, mivel konstans deriváltja nulla. A megtett út kiszámítása:

$$r(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt + r(t_1) \Rightarrow \Delta r = v\Delta t\,,$$

(felhasználtuk, hogy a sebesség nem függ az időtől, ezért kiemelhető az integráljel elé). Látható, hogy visszakaptuk a kisiskolás képletet: $v = s/t$, most már tudjuk, hogy ez csak állandó sebesség esetén igaz. Az út ekkor az idővel lineárisan nő: $s = vt$, vagyis az utat ábrázolva egy olyan egyenest kapunk, amelynek meredeksége, változási gyorsasága konstans *v,* azaz $v = \mathrm{tg}\alpha = s/t$. Ha a sebességet ábrázoljuk az idő függvényében, a görbe (ami most egyenes) alatti terület lesz a megtett út.





PÉLDA

PÉLDA 2. – EGYENLETESEN VÁLTOZÓ MOZGÁS EGY DIMENZIÓBAN

Akkor beszélünk egyenletesen változó mozgásról, ha a gyorsulásvektor konstans. Ez esetben akkor alakul ki egy dimenziós mozgás, ha a kezdősebesség-vektor és a gyorsulásvektor egy egyenesbe esik vagy a kezdősebesség nulla. Példa a **szabadesés**. Tegyük fel pl., hogy a gyorsulásnak és a kezdősebességnek is csak *z* komponense van. A sebesség egy tetszőleges időpontban a következőképpen számítható:

$$v(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt + v(t_1) = a\cdot(t_2 - t_1) + v(t_1) \Rightarrow \Delta v = a\Delta t\,.$$

Tehát az $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ középiskolás képlet csak akkor érvényes, ha a gyorsulás állandó.

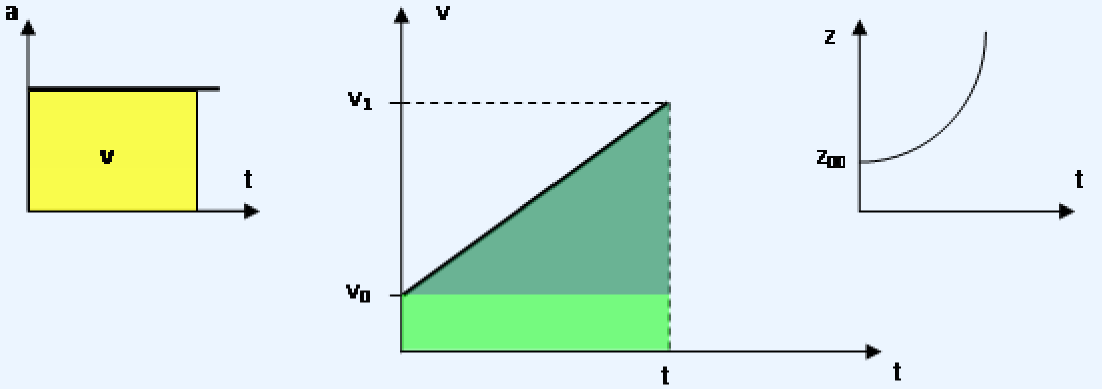
Az elmozdulás kiszámítása:

$$z(t_2) - z(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (at + v_0)\,dt$$

Ha az origóból indultunk, akkor bármely t időpontban:

$$z = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

Vagyis a sebesség lineárisan változik, az egyenes meredeksége *a*. Ha felrajzolnánk a *z* koordináta változását, az egy parabola lenne.



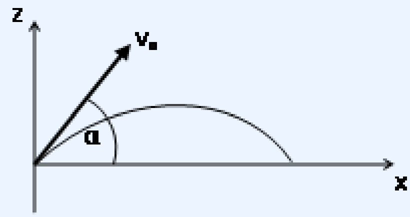
Megjegyezzük, hogy a pályasebesség-időgrafikon alapján tényleges integrálás nélkül is kiszámolhatjuk a megtett utat, hiszen csak egy derékszögű trapéz területét kell kiszámolni. A világoszöld téglalap területe $v_0 t$, a sötétebb zöld háromszögé pedig $(v_1 - v_0)\frac{t}{2} = \Delta v \frac{t}{2} = \frac{\Delta v}{t}\frac{t^2}{2} = a\frac{t^2}{2}$, a kettő összege tényleg a fentebb megadott függvény.

PÉLDA

PÉLDA 3. – FERDE HAJÍTÁS

A gyorsulás itt is állandó ($g \approx 10\frac{m}{s^2}$ a nehézségi gyorsulás). A kezdősebesség most nem esik egy egyenesbe a gyorsulással. Tegyük fel, hogy a pont az origóból indul, a koordináta rendszer *x* tengelye mutasson a kezdősebesség vízszintes komponense irányába, a *z* tengely felfelé mutat. Először fel kell bontani a kezdősebesség-vektort vízszintes és függőleges komponenseire. Az *x* komponense $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, a függőleges

z komponens $v_{0z} = v_0 \sin\alpha$.



y irányban nincs elmozdulás, tehát a $\vec{j}$ egységvektor mindig nullával szorzódik.

A gyorsulás: $\vec{a} = -g\vec{k}$, mivel csak *z* irányban és lefelé gyorsul a test, végig a mozgás során.

A sebesség-idő függvény: $\vec{v}(t) = v_{0x}\vec{i} + 0\vec{j} + (-gt + v_{0z})\vec{k}$

A helyvektor koordinátái: $\vec{r}(t) = v_{0x}t\vec{i} + 0\vec{j} + (-g/2t^2 + v_{0z}t)\vec{k}$

A test akkor ér földet, ha az $\vec{r}(t)$ függvény *z* komponense nulla, azaz ott a $\vec{k}$ egységvektor együtthatója nulla:

$$-g/2t^2 + v_{0z}t = 0$$

Ennek két megoldása van de a triviális t=0 megoldás csak azt mutatja, hogy az origóból dobtuk el a testet. A másik megoldás adja a mozgás teljes időtartamát:

$$t = 2v_0 \sin\alpha / g$$

Ha ezt beírjuk az $\vec{r}(t)$ függvénybe, az első tagban az $\vec{i}$ együtthatója adja a hajítás távolságát:

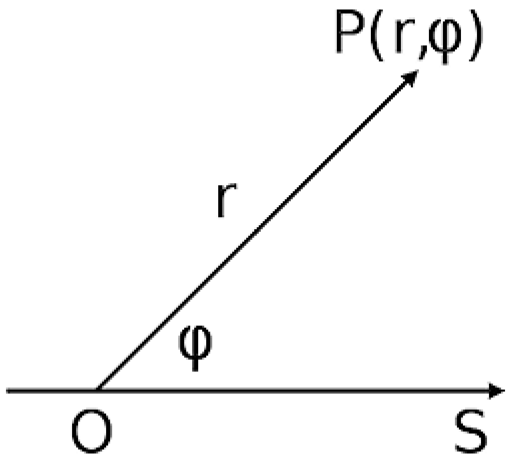
$$x_{max} = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

Az animáció segítségével tanulmányozhatja a most tanultakat:

ANIMÁCIÓ

Síkpolár koordináta rendszer

Kétdimenziós mozgások leírására alkalmas koordináta rendszer. A koordináták: *r* és φ (*r* az origótól mért távolság, φ a tengelytől mért szög).



Példa polár koordináta rendszerre [ii]

A síkpolár koordináta rendszer különösen körmozgás leírásánál előnyös, ha az origót a kör közepén vesszük fel, mivel ekkor csak egy koordináta változik.

Határozzuk meg a Descartes-koordinátákkal való kapcsolatot. Ha adva van *x* és *y*, akkor a síkpolár koordinátákat a következőképp számítjuk ki:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}\varphi = y / x$$

Fordítva, ha *r* és φ van megadva, a Descartes-koordinátákat az

$$x = r\cos\varphi\,,\; y = r\sin\varphi$$

formulákkal kapjuk.

A **szögsebesség** definíciója: $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, a szög változási gyorsasága (a szöget radiánban mérve).

Szöggyorsulás: $\beta = \frac{d\omega}{dt}$ azaz milyen gyorsan változik a szögsebesség.

PÉLDA

PÉLDA 4. – EGYENLETES KÖRMOZGÁS

A szögsebesség állandó, azaz $\beta = 0$. Ekkor a φ szög lineárisan változik: $\varphi = \omega t$. Legyen *T* az egy kör megtételéhez szükséges idő, tehát *T* idő alatt a φ szög 2π-vel változik. Ekkor

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

A *T* idő alatt megtett út a kör kerülete, $s(T) = 2\pi r$. A sebesség állandó, tehát

$$v = \frac{s(T)}{T} = \frac{2\pi r}{T} = r\omega$$

***kerületi sebesség*nek** is nevezik.

A **centripetális gyorsulás** $a_\varphi = v^2 / r = r\omega^2 = v\omega$, a sebesség irányának megváltozását jellemzi (ha a pont nem egyenes vonalon mozog, gyorsulása semmiképp nem azonosan nulla!). A gyorsulás centripetális komponense merőleges a sebességre, ezért *normális* gyorsulásnak is hívják.

Az animáció segítségével tanulmányozhatja a most tanultakat:

ANIMÁCIÓ

PÉLDA

Példa 5. – Egyenletesen változó körmozgás

A szöggyorsulás β=állandó (és persze a kör sugara is állandó).

A szögsebesség lineárisan változik: $\omega(t) = \beta t + \omega_0$, a sebesség hasonlóan: $v(t) = \beta t r + \omega_0 r$.

A **tangenciális (pályamenti) gyorsulás**:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\beta$$

a sebesség nagyságának megváltozását jellemzi, a sebesség irányába mutat, azaz érintőirányú. (Ha a sebesség csökken, akkor a sebességgel ellentétes irányba mutat.) A gyorsulás nagyságát, mivel a két komponens merőleges, "pitagorasszal" kapjuk:

$$a = \sqrt{a_\varphi{}^2 + a_t{}^2}$$

A megtett utat hasonlóan számoljuk ki, mint az előző példában: $s = \frac{1}{2}a_t t^2 + v_0 t$. Ez tehát nem függ a centripetális gyorsulástól.

Az animáció segítségével tanulmányozhatja a most tanultakat:

ANIMÁCIÓ

Számolási Feladat

Feladat

Egy tömegpont egyenletesen lassuló körmozgást végez $a_t = -2,5\frac{m}{s^2}$ tangenciális gyorsulással, 15m/s kezdeti sebességgel. Centripetális gyorsulása két másodperc leteltével $a_{cp}(t = 2) = 20\frac{m}{s^2}$.

Mekkora szögsebességgel indult és mennyi utat tesz meg megállásig a tömegpont?

Megoldás: A 2. másodperc végén a sebesség

$$v = v_0 + a_t t = 15\frac{m}{s} - 2,5\frac{m}{s^2} \cdot 2s = 10\frac{m}{s}$$

A centripetális gyorsulásra tanult $a_{cp}=v^2/r$ képletbe behelyettesítve:

$$20\frac{m}{s^2} = \frac{\left(10\frac{m}{s}\right)^2}{R}$$

Ebből kapjuk, hogy a körpálya sugara $R = 5m$. A kezdeti szögsebesség:

$$\omega_0 = \frac{v_0}{R} = \frac{15\frac{m}{s}}{5m} = 3\frac{1}{s}$$

A következő lépés, hogy kiszámoljuk, hogy mennyi ideig tart, amíg megáll. Ekkor a sebesség nulla, ezt kell behelyettesíteni a $v = v_0 + a_t t$ összefüggésbe:

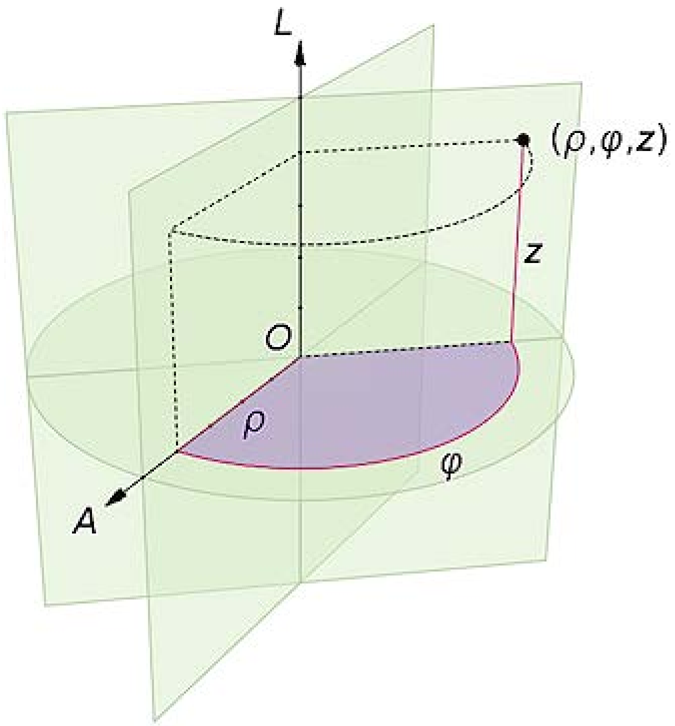
$$0 = 15\frac{m}{s} - 2,5\frac{m}{s^2} \cdot t$$

Ebből kapjuk, hogy 6s kell ahhoz, hogy megálljon a tömegpont. Most már könnyen kiszámolhatjuk a megtett utat:

$$s = \frac{1}{2}a_t t^2 + v_0 t = -\frac{1}{2} \cdot 2,5\frac{m}{s^2} \cdot 36s^2 + 15\frac{m}{s} \cdot 6s = 45m$$

Henger-koordináta rendszer

A henger-koordináta rendszerrel három dimenzióban lehet megadni a pontok helyzetét. Úgy kapjuk, hogy a síkpolár koordináta rendszert kiegészítjük egy harmadik dimenzióval, a Descartes koordinátarendszer harmadik tengelyével. Gyakori, hogy a síkpolár rendszerbeli *r* helyett r-t használnak. Tehát a három koordináta: r, φ és *z*. Különösen csavarszerű mozgások leírásánál előnyös. Ugyanis ha a tömegpont egy hengerpaláston mozog, akkor a r koordináta állandó. Ha emellett φ és *z* egyenletesen változnak, akkor egy csavarszerű spirális pályán mozog a test.



***Példa henger koordináta rendszerre* [iii]**

3. Ellenőrző kérdések

KINEMATIKA

Többször megoldható feladat, **elvégzése kötelező**.
A feladat végső eredményének a mindenkori **legutolsó megoldás** számít.

Válassza ki a helyes megoldást!

1. **Két, kezdetben egyforma v_0 sebességű autó állóra fékezése pontosan ugyanannyi ideig tartott. Az első autó először erősen fékezett, aztán kevésbé, míg a második autó először fékezett kevésbé, majd később erősebben. Melyiknek a fékútja volt rövidebb?**

   - Ennyi adatból nem dönthető el.
   - A második autó fékútja rövidebb.
   - Az első autó fékútja rövidebb.
   - A két fékút egyenlő.

2. **Az A és a B testeket vízszintes talajról ugyanakkora kezdősebességgel hajítjuk el. Az A test kezdősebessége kisebb szöget zár be a vízszintessel, mint a B kezdősebessége. Melyik állítás helyes?**

   - A B test mozgása hosszabb ideig tart és messzebbre jut el, mint az A test.
   - A B test magasabbra emelkedik, és messzebbre jut.
   - A B test magasabbra emelkedik, de az A test messzebbre jut.
   - A válaszhoz ismernünk kellene a két szöget.
   - A B test mozgása hosszabb ideig tart.

3. **Egy autó álló helyzetből indul és 5 másodperc alatt gyorsul fel 100km/h-ra, miközben egyenes vonalon mozog. Mennyi a gyorsulás normális és tangenciális komponense?**

   - 0 és 20 m/s^2
   - 0 és 5,55 m/s^2
   - 20 m/s^2 és 0
   - 72 m/s^2 és 0
   - 10 és 10 m/s^2
   - 5,55 m/s^2 és 0

4. **Egy test sebessége egy adott időpillanatban x irányba mutat és nagysága 6m/s. A test gyorsulása végig z irányba mutat és konstans 2m/s^2. Hány m/s lesz 4s múlva a test sebessége?**

   - ennyi adatból nem lehet megmondani
   - 14
   - 32,56
   - 8
   - 2
   - 10

5. **Egy testet vízszintes talajról ferdén elhajítunk. A test t>0 idő múlva, az indítástól s>0 távolságra visszaesik a talajra. Melyik állítás igaz a pálya**

tetőpontjára?

- ○ A pálya tetőpontján a test sebességvektora merőleges a test gyorsulásvektorára.
- ○ A test sebessége nem nulla, gyorsulása nulla.
- ○ A test sebességének nagysága kisebb, gyorsulása nagyobb, mint a pálya többi pontján.
- ○ A sebesség és a gyorsulás is nulla.
- ○ A test sebessége nulla, gyorsulása nem nulla.

BIBLIOGRÁFIA:

[i] Frans Hals alkotása, Louvre, Párizs (public domain)

[ii] Készítette Masur (public domain)

[iii] Készítette Jorge Stolfi (public domain)