Kovács Endre, Paripás Béla,

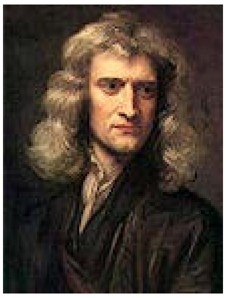
Fizika I.

2

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a
TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

II. TÖMEGPONT DINAMIKÁJA

1. NEWTON TÖRVÉNYEI



Sir Isaac Newton (1643-1727) angol fizikus, matematikus, csillagász és filozófus. [i]

Newton törvényei a klasszikus mechanika legfontosabb, legalapvetőbb axiómái, 1687-ből.

I. Minden test megtartja nyugalmi állapotát, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgását mindaddig, amíg más testek ennek megváltoztatására nem kényszerítik. Pontosabb ennél a **kiválasztási axióma**: Van olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben a magára hagyott testek megtartják eredeti mozgásállapotukat (azaz a sebességvektor állandó). Ezeket a vonatkoztatási rendszereket **inerciarendszernek** nevezzük.

II. Ha egy állandó tömegű testre egyetlen erő hat, akkor az egyenlő a test tömegének és **gyorsulásának** szorzatával: $\vec{F} = m\vec{a}$, vagyis a gyorsulást úgy számolhatjuk ki, hogy a testre ható erőt elosztjuk annak tömegével.

III. Akció-reakció vagy **hatás-ellenhatás törvénye**: Ha az *A* test a *B* testre F_{AB} erőt fejt ki, akkor *B* test is erőt fejt ki az *A* testre. Ezen F_{AB} erő azonos nagyságú, de ellentétes irányú az eredeti F_{AB} erővel: $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$

IV. **Szuperpozíció elve**: Ha az anyagi pont egyidejűleg több hatásnak is ki van téve, azaz több erő hat rá, akkor együttes hatásuk egyetlen ún. eredő erővel helyettesíthető. Az eredő erő az egyes erők vektori összege: $\vec{F}_e = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$. Ebből az következik, hogy a test gyorsulását megkaphatjuk úgy, ha az egyes erők okozta $\vec{a}_i = \vec{F}_i / m$ gyorsulásokat összeadjuk. Más szavakkal, a testre ható erők külön-külön, egymástól függetlenül okoznak gyorsulásokat és a tényleges gyorsulás ezek vektori összege.

A Newton-axiómák semmit sem mondanak arról, hogy mitől függ az, hogy két konkrét test között mekkora és milyen irányú erő hat. Azokat a függvényeket, amelyek matematikai formában megadják az adott testre ható erőket, **erőtörvények**nek nevezzük. A különböző típusú erőkhöz más-más erőtörvény tartozik. Az alábbiakban felsoroljuk a legalapvetőbb erő-fajtákat és a hozzájuk tartozó erőtörvényeket:

a. **Newton-féle gravitációs erő**: $F = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}$. ($\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$ univerzális állandó).
Megjegyezzük, hogy ugyan ezt az erőtörvényt itt tömegpontokra írtuk fel, nem csak pontszerű testekre érvényes. Bármilyen gömbszimmetrikus tömegeloszlású test olyan gravitációs erőt fejt ki más gömbszimmetrikus testekre, mintha az egész tömege a gömb középpontjába összpontosulna.

b. Speciálisan ha a Newton-féle gravitációs erőtörvényben m_1 a Föld tömege, *r* a Föld sugara, kapjuk a jól ismert képletet: $G = mg$ a **súlyerő** vagy nehézségi erő.

c. Elektromos ponttöltések között ható **Coulomb-erő**: $F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$.

d. Mágneses **Lorentz-erő**: $\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$, ahol *B* a mágneses indukció.

e. **Rugóerő**: $F_x = -Dx$, ahol *D* a rugóállandó, *x* az egyensúlyi helyzettől való kitérés. Általánosabban fejezi ki ezt a *Hooke-törvény*, mely kimondja, hogy egy rugalmas test alakváltozása arányos azzal az erővel, mely az alakváltozást okozza. Ez természetesen egy közelítés, főleg kicsi deformációkra pontos.

f. **Súrlódási erő**: $F_s = \mu F_{ny}$ (lehet csúszási vagy tapadási)

g. **Közegellenállás vagy légellenállás**: $F_k = -cv$ vagy $-cv^2$

h. **Kényszererők**, pl. kötélerő (K), tartóerő (T). Ezek mindig éppen akkorák, hogy a kényszerfeltétel teljesüljön. Pl. ha két test egy 3m hosszú kötéllel össze van kötve, akkor az a kényszerfeltétel, hogy a távolságuk nem lehet nagyobb, mint 3m és a kötélerő pont akkora, amekkora elegendő ennek a biztosításához.

i. **Tehetetlenségi erők:** Ezek csak akkor lépnek fel, ha a vonatkoztatási rendszerünk nem inerciarendszer. Később tárgyaljuk őket.

Newton I., II., és IV. axiómájából kapjuk a feladatoknál gyakran használt összefüggést, amelyet a **dinamika alapegyenletének** is szoktak nevezni. Inerciarendszerben

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}}$$

Ezt koordinátánként kifejtve, a megfelelő erőtörvényeket beírva kapjuk a konkrét tömegpontra vonatkozó **mozgásegyenleteket**, amely egy olyan egyenletrendszer, amely általánosan három csatolt másodrendű differenciálegyenletből áll. Derékszögű Descartes koordináta rendszerben:

$$m\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

$$m\ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

$$m\ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

Megjegyzendő, hogy a mozgásegyenlet jobboldalán nincsenek második deriváltak, azaz az erő nem függhet a gyorsulástól, mert ez ellentmondana a szuperpozíció elvének. A mozgásegyenlet(ek) megoldásához általánosan 6 állandót kell megadni, ezek gyakran a kezdeti $\vec{r}(t=0)$ és $\vec{v}(t=0)$ vektorok komponensei. Az egyenletek megoldásával kapjuk az $\vec{r}(t)$ függvényt, amit **mozgástörvény**nek is neveznek. Tehát a mozgástörvényből közvetlenül kiolvasható, hogy hogyan mozog a test, azaz melyik időpillanatban hol tartózkodik.

PÉLDA

PÉLDA

Tegyük fel, hogy (álló helyzetből, *h* magasságból) leejtünk egy testet, amelyre esés közben oldalról a szél vízszintes irányú, az idővel exponenciálisan növekvő erőt fejt ki. Ekkor, ha olyan koordináta-rendszert veszünk fel, amely *z* tengelye felfelé, *x* tengelye pedig szélirányba mutat, a test mozgásegyenletei:

$$m\ddot{x} = F_0 e^{\alpha t}$$

$$m\ddot{y} = 0$$

$$m\ddot{z} = -mg$$

Mivel most a komponensek teljesen függetlenek (persze csak amíg be nem csapódik a test a talajba), egyszerű integrálással meghatározható a mozgástörvény:

$$x(t) = \frac{F_0}{\alpha^2} e^{\alpha t}$$

$$y(t) = 0$$

$$z(t) = h - \frac{g}{2} t^2$$

A tehetetlenségi erők

A Newton törvények **inerciarendszerben** érvényesek. A fizika tanítása során ezért általában ragaszkodunk az inerciarendszerbeli leíráshoz, a szakmai tárgyakban azonban szükség lehet egyes mozgások gyorsuló koordinátarendszerekben történő leírására is. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy ilyen esetekben is használható a dinamika alaptörvénye, de szükség van bizonyos *fiktív erők*, a tehetetlenségi erők bevezetésére. Hangsúlyozandó, hogy ezek nem valóságos, azaz kölcsönhatásokhoz rendelt erők, hanem a gyorsuló rendszerekben történő leírást egyszerűsítő "segédeszközök".

Tekintsünk például egy $\vec{a_0}$ gyorsulással rendelkező vonatkoztatási rendszert. Az m tömegű pont gyorsuljon a rendszerrel együtt, tehát neki is $\vec{a_0}$ a gyorsulása. Az inerciarendszerbeli mozgásegyenlet: $\sum \vec{F} = m\vec{a_0}$

A gyorsuló rendszerben elhelyezkedő megfigyelő a tömegpontot nyugvónak látja, ezért a rá ható erők eredőjét zérusnak gondolja. Ezt csak egy $-m\vec{a_0}$ tehetetlenségi erő felléptével tudja magyarázni, hiszen:

$$\sum \vec{F} - m\vec{a_0} = 0$$

Példaként vegyünk egy gépkocsiban utazó embert, aki önkéntelenül is a gépkocsihoz képest tekinti a mozgását. Fékezéskor (hátrafelé mutató gyorsulás) egy előre lendítő erőt érez ($-m\vec{a_0}$), amit a testének a kitámasztásával ($\sum \vec{F}$) igyekszik kompenzálni, és ezáltal egyensúlyt (=0) elérni (természetesen a gépkocsihoz képest). Az út mellett álló (tehát közelítőleg inerciarendszerbeli) megfigyelő persze pontosan látja, hogy az utas azért nyomja hátrafelé magát, hogy a teste is az autó lassulásával megegyezően lassuljon.

A tehetetlenségi erők közül a legismertebb a forgó rendszerekben fellépő **centrifugális erő** és **Coriolis-erő**.

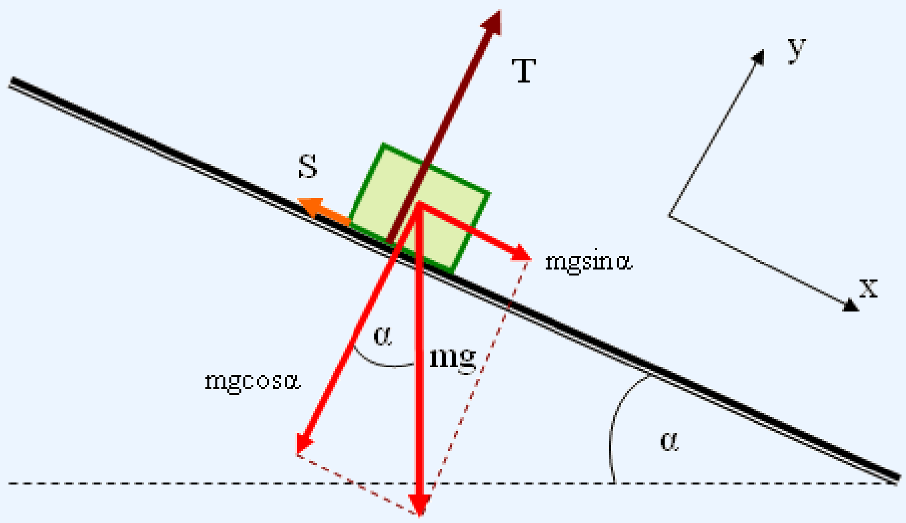
Példa

Példa 1. – A lejtőre tett test mozgásának vizsgálata

A feladat a **gyorsulás** meghatározása, ugyanis ebből kaphatjuk meg pl. azt, hogy mennyi ideig tart, amíg a lejtő aljáig ér a test. A dinamika alapegyenletét használjuk:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Az alábbi ábrán be vannak rajzolva a testre ható erők.



Mivel a gyorsulás lejtőirányú, célszerű olyan koordináta-rendszert használni, hogy az egyik tengely (mondjuk az *x*) párhuzamos legyen a lejtővel, a másik merőleges rá. Az erőket fel kell bontani *x* és *y* komponenseikre. Ez most egyedül a súlyerőnél jelenthet problémát. Észre kell venni, hogy ha a lejtő síkja α szöget zár be a vízszintessel, akkor a súlyerő is α szöget zár be a függőlegessel (Merőleges szárú szögek: a függőleges súlyerő merőleges a vízszintesre, a merőleges komponens meg nyilván merőleges a lejtőre). A merőleges komponens a szöggel szemközti befogó, ezért $(\mathrm{mg})_y = \mathrm{mg}\cos\alpha$. Hasonlóan a lejtővel párhuzamos komponens $\mathrm{mg}\sin\alpha$. Tehát a

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

vektor-egyenlet *x* komponense:

$$mg\sin\alpha - S = ma_x = ma$$

Az *y*-komponens:

$$T - mg\cos\alpha = 0$$

A *T* tartóerő egy kényszererő, pontosan akkora, hogy ne legyen lejtőre merőleges gyorsulás. Ha túl kicsi lenne, besüppedne, beszakadna a lejtő, ha túl nagy, akkor pedig magától felrepülne a test, ami értelmetlen. A lejtő felülete és a test között ható nyomóerő a *T*, de ez egyenlő $mg\cos\alpha$-val, ebből számolhatjuk ki a súrlódási erőt

$$S = \mu T = \mu mg\cos\alpha$$

Ezt visszahelyettesítve az *x* komponensre vonatkozó egyenletbe:

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cdot\cos\alpha = ma$$

a tömeggel egyszerűsítve kapjuk a keresett gyorsulást:

$$a = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)$$

Megjegyzés:

Tegyük fel, hogy a zárójelben negatív szám áll. Ez előfordulhat nem túl meredek lejtőre és nem túl csúszós felületekre. Két eset van.

1. Ha a testnek volt kezdősebessége, akkor a gyorsulás valóban negatív, a test lassul.
2. Ha viszont a test kezdetben állt, akkor a test nem indul el. Nagy hiba lenne azt gondolni, hogy felfelé indul el! Azért nem indulhat el felfelé, mert akkor a súrlódási erő lefelé mutatna és felfelé semmilyen erő nem gyorsítaná, ami ellentmondás. Ekkor a csúszási súrlódási erő helyett a tapadási súrlódási erő hat, amelynek a μF_{ny} csak a maximális értéke. A tapadási súrlódási erő pontosan akkora lesz, hogy megakadályozza a test elindulását, vagyis egyenlő lesz $mg\sin\alpha$-val.

Az is nyilvánvaló, hogy ha a testet a lejtőn felfelé (-*x* irányú) kezdősebességgel indítjuk a lejtőre, akkor a súrlódási erő a lejtőn lefelé hat, tehát az *x* komponensre vonatkozó egyenlet:

$$mg\sin\alpha + \mu mg\cdot\cos\alpha = ma$$

Ekkor a test mindenképp lassulni fog.

Az animáció segítségével tanulmányozhatja a most tanultakat:

ANIMÁCIÓ

Gyakorlati alkalmazás

Nehézségi erőtér, gravitációs módszerek

A gravitációs geofizikai módszerekkel a Föld nehézségi erőterének eloszlását vizsgáljuk. Nehézségi erőtér alatt a Föld tömegéből származó Newton-féle gravitációs erő és a Föld forgásából adódó centrifugális erő összegét értjük. Ez tartalmazza még a Földön kívüli testek erőtereit is (Hold, Nap, bolygók, csillagok), de ezek hatásait a geofizikában le kell választani, mert egyébként egy időben változó erőtérrel lenne dolguk. Másrészt tartalmazza azokat a rendellenességeket is, amit az egyes földtani szerkezeteknek környezetüktől eltérő sűrűsége hozott létre. Az utóbbit nevezzük anomális térnek, melyek a nyersanyagkutatás és mérnöki gyakorlatok számára információval rendelkeznek.

Eötvös Loránd (1848-1919) magyar fizikus

Ezek a Föld tömegének hatása mellett igen csekély mértékű erőterek, gyakran annak 10^{-7} szerese. Kimutatására rendkívüli érzékenységgel rendelkező műszerek alkalmasak. Ilyen műszert elsőként ***Eötvös Loránd*** (1848-1919) szerkesztett, mely még ma is a legérzékenyebb mérőeszközök közé tartozik. A szóban forgó Eötvös-ingával a nehézségi erőtér potenciáljának másodrendű deriváltjaiból számítható görbületi mennyiség és a nehézségi erő horizontális gradiense határozható meg. Ezzel a műszerrel végzett első mérések jelentik a gravitációs mérések földtani alkalmazásának kezdetét és a szerkezetkutató geofizika megindulását.

"Eötvös-inga" vagy másnéven torziós inga (torsion balance)

2. Impulzus és energia

A következőkben bevezetünk néhány olyan fizikai mennyiséget, amelyek alapvető fontosságúak a mechanikai feladatok megoldásában.

Impulzus és impulzustétel

Az **impulzus** (lendület) definíciója: $\vec{I} = m\vec{v}$. Kérdés, mi szabja meg azt, hogy változik-e az impulzus, ill. milyen gyorsan változik. A választ a következő tétel adja meg:

Impulzustétel tömegpontra:

$$\frac{d}{dt}\vec{I} = \sum \vec{F}$$

azaz tömegpont impulzusának idő szerinti deriváltja egyenlő a rá ható összes erő eredőjével. Speciálisan, a magára hagyott tömegpont impulzusa állandó.

Bizonyítás:

$$\frac{d}{dt}\vec{I} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \sum \vec{F}$$

Newton II. axiómája mellett felhasználtuk, hogy a tömeg állandó. Megjegyezzük, hogy az impulzustételt is szokták Newton II. axiómájának is nevezni, mivel ugyanazt fejezi ki (belőle a fenti alak levezethető), sőt, annyival általánosabb, hogy változó tömeg esetén is érvényes. Az érdekessége az, hogy adott eredő erő esetén a tömegtől független az impulzus-változás.

Számolási Feladat

Feladat

Egy fél kilós kalapáccsal szöget verünk be egy farönkbe. Mekkora az átlagos erőhatás, ha a 25 m/s sebességre felgyorsított kalapács 0,02 másodperc alatt fékeződik le?

Megoldás: Az impulzustételt érdemes használni:

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{m\Delta v}{\Delta t}$$

Behelyettesítve

$$F = \frac{0,5kg \cdot 25m/s}{0,02s} = 625N.$$

Munka és munkatétel

A **munka** általános definíciója:

$$W_{1,2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r}$$

az erő elmozdulás szerinti integrálja. Ha az erő állandó, akkor kiemelhető az integráljel elé, ekkor

$$W = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\Delta r \cos\alpha$$

ahol α a közbezárt szög. $\alpha = 0$ -ra kapjuk a legegyszerűbb $W = Fs$ alakot.

Tekintsünk most egy tömegpontot és az egyszerűség kedvéért tegyük fel, kezdetben nyugalomban van és hogy csak egy állandó F erő hat rá. Ekkor a pont gyorsulása *a*=állandó, sebessége *t* idő múlva $v = at$, ezalatt $s = at^2/2$ utat tesz meg. Ezeket felhasználva:

$$W = Fs = ma \cdot \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}m(at)^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

Ez utóbbi mennyiség a fizikában fontos szerepet játszik, ez a **tömegpont kinetikus (vagy mozgási) energiája**: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Vagyis a végzett munka a test kinetikus (mozgási) energiájának növelésére fordítódott. Ha pl. az erő ellentétes irányú a pillanatnyi sebességgel, akkor a munka negatív, ennek megfelelően a tömegpont lassul, mozgási energiája csökken.

A **munkatétel** kimondja, hogy a testen végzett munka a test mozgási energiájának megváltozásával egyenlő. Képlettel:

$$\boxed{W = \Delta E_k}$$

Tehát a test mozgási energiája (végső soron a sebessége) megváltozásának az az oka, hogy az eredő erő munkát végez a testen.

Teljesítmény és teljesítménytétel

A (pillanatnyi) **teljesítmény** általános definíciója:

$$P = \frac{dE}{dt}$$

az "egységnyi idő alatt közölt energia". Általában ez sokféle energia lehet, a hőtanban pl. hőenergia. A mechanikában az átlagteljesítmény: $P = \frac{W}{\Delta t}$, ez tetszőlegesen hosszú Δt időtartamra értelmezhető.

A mechanikai **teljesítménytétel** kimondja, hogy a tömegpontra ható erők teljesítménye megegyezik a tömegpont kinetikus energiájának változási gyorsaságával:

$$P = \frac{dE_k}{dt}$$

Ezt úgy kaphatjuk a munkatételből, hogymindkét oldalt elosztjuk az eltelt idővel, majd ezzel az idővel nullához tartunk (azaz határértéket veszünk).

Ezt felhasználva, egy dimenzióban

$$P = \frac{dE_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}m(\dot{v}v + v\dot{v}) = m\dot{v}v = mav = Fv$$

Általánosan, a pillanatnyi (mechanikai) teljesítmény az erő és a sebesség skaláris szorzataként is megkapható: $P = \vec{F}\vec{v}$

Konzervatív erőtér

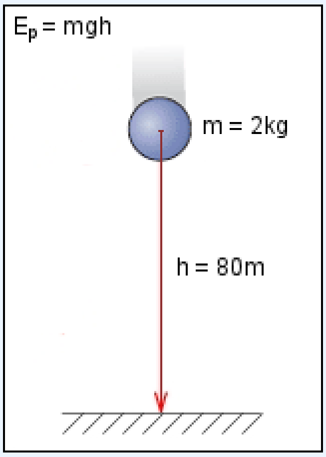
Egy időtől (explicite) nem függő erőt **konzervatívnak** nevezünk, ha az általa a pontszerű testen *A* és *B* pont között végzett munka független az úttól, vagyis attól, hogyan jutottunk *A*-ból a *B*-be. Ez ekvivalens azzal, hogy az erő bármely zárt görbére vett integrálja nulla. Jelöljünk ki egy kitüntetett *A* kezdőpontot, ahol a potenciális energiát nullának vesszük. Ekkor bármely másik (pl. *B*) pont jellemezhető azzal, hogy mekkora munkát végez az erő, ha a *B*-ből az *A*-ba megy a test. Ezt a munkát úgy hívjuk, hogy a test **potenciális energiája** (vagy helyzeti energiája) a *B* pontban.

$$E_p(B) = W_{BA} = \int_B^A \vec{F}d\vec{r} \quad \text{ha } E_p(A) = 0$$

PÉLDA

PÉLDA 1.

Legyen a padló szintje a potenciális energia kezdőpontja, és tegyük fel, hogy leejtünk egy G=20N súlyú testet 80m magasról. Ekkor a nehézségi erő W=1600J munkát végez, más szavakkal a test helyzeti energiája E_p=mgh=1600J volt.



Fontos megjegyezni, hogy a potenciális energiája mindig egy konkrét erőhöz, az adott test egy másik testtel vagy mezővel történő kölcsönhatáshoz tartozik, ellentétben a mozgási energiával, amely csak az adott testhez tartozik. Rögzített vonatkoztatási rendszerben adott időpillanatban egy testnek csak egy mozgási energiája van, potenciális energiája viszont egyszerre több is lehet, pl. gravitációs és elektrosztatikus.

A fenti képletből látható, hogy a nagyobb erő nagyobb potenciális energia különbséget jelent. Ezt az állítást meg is fordíthatjuk: minél gyorsabban változik a potenciális energia [1], annál nagyobb erő hat. Egy dimenzióban a következő összefüggést írhatjuk fel:

$$F=-\frac{\Delta E_p}{\Delta x}\text{ , általánosabban }F=-\frac{dE_p}{dx}$$

A negatív előjel arra utal, hogy az erő a potenciális energia csökkenésének irányába hat ("*energiaminimum elve*").

Három dimenzióban azt mondhatjuk, hogy amelyik irányban a legnagyobb a potenciális energia csökkenésének gyorsasága, abba az irányba hat az erő. Más szavakkal: az erő a potenciális energia negatív gradiense:

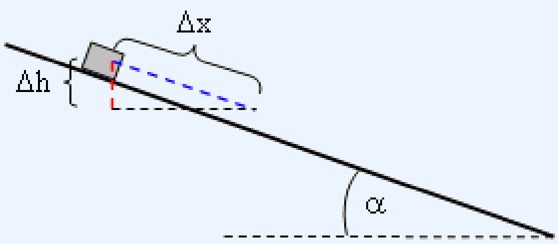
$$\vec{F}=-\mathrm{grad}E_p\text{ , ahol: }\mathrm{grad}\,E_p=\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

(A gradiens jelentését a matematikából már ismerjük .)

PÉLDA

PÉLDA 2.

Tegyük fel, hogy egy tömegpontot súrlódásmentes lejtőre helyezünk. A lejtő mentén a nehézségi erő **potenciális energiája** lefelé csökken. Ha a test Δx távolságot tesz meg a lejtő irányába (kék szaggatottal berajzolva), akkor a magassága $\Delta h=\Delta x\sin\alpha$-val (piros szaggatott), a helyzeti energiája $mg\Delta h=mg\Delta x\sin\alpha$-val csökken. Ebből a testre ható lejtő irányú erő: $F=-\frac{\Delta E_p}{\Delta x}=mg\sin\alpha$, megegyezésben azzal, ahogy azt a lejtős példánál levezettük .



Tekintsük most azt a speciális esetet, amelyben **csak konzervatív erők hatnak**. Ekkor bármely *A* és *B* pontra fennáll, hogy

$$E_p(B)-E_p(A)=W=E_k(A)-E_k(B)$$

(itt a második egyenlőségnél a munkatételt használtuk) vagyis

$$\Delta E_k=-\Delta E_p$$

azaz amennyivel csökken a helyzeti energia, annyival nő a mozgási és fordítva.

Ha bevezetjük az $E=E_p+E_k$ **mechanikai energiát**, akkor látható, hogy ez **konzervatív erőtérben megmarad**, vagyis állandó (innen kapta a nevét a konzervatív erőtér). Ez a mechanikai energia megmaradásának tétele. Konzervatív erőtér pl. a gravitációs és az elektrosztatikus erőtér. Ha *nem-konzervatív erők* is hatnak, akkor a munkájuk egyenlő a mechanikai energia megváltozásával.

PÉLDA

PÉLDA 3.

Leejtünk egy testet h=80m magasról, mekkora sebességgel csapódik a földbe? Ezt az energia-megmaradással legegyszerűbb megoldani. Válasszuk a helyzeti energia nulla szintját a talajra, ekkor $\frac{1}{2}mv^2=mgh$, ebből

$$v=\sqrt{2gh}=40\frac{m}{s}$$

PÉLDA

PÉLDA 4.

A fenti, m=2kg tömegű testet vízszintesen hajítjuk el v=30m/s kezdősebességgel 80m magasról. Mekkora lesz a sebessége, amikor a talajba csapódik? Kiszámolhatjuk úgy is, hogy felhasználjuk azt a kinematikából ismert tényt, hogy a vízszintes és függőleges irányú sebességkomponensek függetlenek egymástól és az előbbi nem változik, utóbbi 40m/s-ra nő, vagyis a végsebesség "pitagorasszal" $\sqrt{30^2+40^2}=50m/s$. Energiamegmaradással mindez úgy néz ki, hogy kezdetben volt 1600J helyzeti és 900J mozgási energiája, tehát a földet éréskor van $1/2mv^2$=2500J mozgási energiája, ez 50m/s sebességnek felel meg.

Vegyük észre, hogy a két módszerrel lényegében ugyanazokat a műveleteket kell elvégezni, csak az energiamegmaradásnál először szoroztunk, majd osztottunk 1/2m-mel. Azt is érdemes megjegyezni, hogy mivel a kinetikus energiában a sebesség négyzete szerepel, a vízszintes és a függőleges sebesség-komponenshez tartozó kinetikus energia független egymástól. gravitációs gyorsulás az utóbbit változtatja, az előbbi viszont változatlan.

PÉLDA

PÉLDA 5.

Minden ugyanaz, mint az előző példában, csak a testet most ferdén hajítjuk el a vízszinteshez képest α szöggel. A korábban ismertetett kinematikai számoláshoz ismernünk kell α-t, ki kell számolni a szinuszát és a koszinuszát a sebességkomponensekhez. Energiamegmaradással viszont pont ugyanúgy járhatunk el, mint az előző példánál és a végeredmény is annyi lesz.

Tehát ha csak az a kérdés, hogy egy adott magasságban mennyi a test sebessége, akkor az energiamegmaradás módszerét érdemes alkalmazni, hiszen a kezdősebesség irányával nem is kell számolni. Viszont ha pl. a hajítás idejét is ki kell számolni, akkor szükség van a sebességkomponensekre.

PÉLDA

PÉLDA 6.

Egy h=10m magas, $\alpha=45°$-os lejtőről kezdősebesség nélkül lecsúszik egy 1kg tömegű test, a lejtő alján a sebessége 10m/s. Mekkora a súrlódási együttható?

A test kezdeti helyzeti energiája 100J, végső mozgási energiája 50J, tehát a mechanikai energia megváltozása -50J. Ebből következik, hogy a súrlódási erő negatív munkát végzett, amelyet a

$$W_s=F_s s=\mu mg\cos\alpha\cdot\frac{10}{\sin\alpha}$$

képlettel számolunk ki, egyszerűsítve kapjuk, hogy μ=0,5.

PÉLDA

Példa 7. – A Newton-féle gravitációs erő potenciális energiája

Legyen egy rögzített M testünk és számoljuk ki egy tőle r távolságra lévő *m* tömegű test **potenciális energiáját**. Vegyük a végtelenben a nulla szintet, és távolítsuk az *m* testet *r* távolságból a végtelenig. Ekkor a **Newton-féle gravitációs erő** ellentétes irányú az elmozdulással, tehát E_p negatív lesz:

$$E_{\mathrm{p}}(r)=\int_r^{\infty}\vec{F}d\vec{r}=\gamma m_1 m_2\int_r^{\infty}\frac{-1}{r^2}d\vec{r}=\gamma m_1 m_2\left[\frac{1}{r}\right]_r^{\infty}=-\frac{\gamma m_1 m_2}{r}$$

Példa

Példa 8. – A rugóerő potenciális energiája

Az $F_x=-Dx$ erőtörvény konzervatív erőteret ad meg. Számoljuk ki, legalább mennyi **munka** szükséges ahhoz, hogy a rugót a feszültségmentes *x=0* állapotból az $x=\ell$ állapotig nyújtsuk! Ekkor az elmozdulás ellentétes irányú a rugóerővel, tehát az erőtörvényben szereplő negatív előjel kiesik, ennek tudatában írhatjuk, hogy:

$$W=\int_0^{\ell}F_x dx=D\int_0^{\ell}x\,dx=D\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\ell}=\frac{1}{2}D\ell^2$$

Ekkora potenciális energiája lesz a kihúzott (vagy az összenyomott) rugónak.

3. Rezgések és hullámok

Rezgések és hullámok a fizikának és a műszaki tudományoknak nagyos sok ágában előfordulnak, pl. a hangtanban. Ha egy gitárhúrjának egyik pontját festékpöttyel megjelöljük, a festett pont is rezgést végez. A legegyszerűbb rezgés a (szinuszos) harmonikus rezgés. Ilyet végeznek pl. szilárd test atomjai egyensúlyi helyzetük körül. Csak az egydimenziós esetet tárgyaljuk.

Harmonikus rezgés

Akkor végez egy tömegpont harmonikus rezgést, ha rá egy erő hat, a rugalmas erő **erőtörvénye**: $F_x=-Dx$, ahol *x* az egyensúlyi helyzettől való kitérés (ill. ha az erők eredője a fenti alakban írható fel). Tehát ez egy visszahúzó erő, ami arányos a kitéréssel, csak ellentétes irányú. Ebből kapjuk a **mozgásegyenletet**:

$$m\ddot{x}=-Dx$$

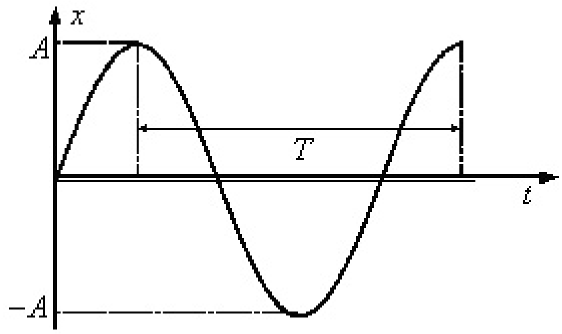
Ez egy másodrendű közönséges differenciál-egyenlet, az általános megoldása, a **mozgástörvény**:

$$\boxed{x(t)=A\sin(\omega t+\delta)}$$

ahol a rezgés ω körfrekvenciájára fennáll, hogy

$$\omega=\sqrt{\frac{D}{m}}$$

továbbá *A* az amplitúdó (a kitérés maximális értéke), δ pedig a kezdőfázis. Tehát szinuszos (harmonikus) rezgés jön létre. Az ábrán azt az esetet láthatjuk, amikor d=0.



A sebesség-idő függvényt deriválással kaphatjuk:

$$v_x(t) = A\omega\cos(\omega t + \delta)$$

Ha ezt még egyszer lederiváljuk, a gyorsulást kapjuk:

$$v_x(t) = A\omega^2\sin(\omega t + \delta)$$

Ha ezt visszahelyettesítjük a mozgásegyenletbe, beláthatjuk, hogy a megadott *x(t)* függvény tényleg jó megoldás, de csak akkor, ha a $\omega^2 = D/m$ feltétel teljesül. Az *A* és a δ konstansokat az *x* és v_x kezdeti értékei határozzák meg, ez utóbbiaknak viszont nincs hatásuk a frekvenciára. A periódusidő a legkisebb olyan *T* idő, amelyre $x(t) = x(t+T)$ bármely *t*-re. A körmozgáshoz hasonlóan

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Számítsuk ki a rezgő tömegpont kinetikus és a rugalmas erőtér **potenciális energiáját**:

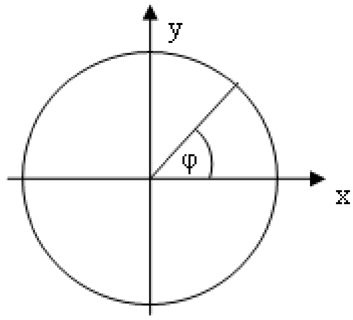
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t) \quad \text{és} \quad E_p = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t)$$

(feltettük, hogy $\delta = 0$ és felhasználtuk ω definícióját). Látható, hogy a kettő összege állandó ($DA^2/2$) és egy periódusra kiátlagolva a kettő megegyezik (ennek pl. a *hőtanban* lesz szerepe). Egy rezgés során a mozgási és a potenciális energia folyamatosan egymásba alakul. A mozgási energia akkor a legnagyobb, amikor a tömegpont az egyensúlyi helyzetén halad át, ekkor a rugó feszítetlen, tehát nincs energiája. Ezután ahogy a test lassul, a mozgási energia csökken, de pontosan ugyanilyen ütemben növekszik a potenciális energia, és amikor a test a szélső helyzetben egy pillanatra megáll, akkor nyilván a mozgási energia nulla, a potenciális pedig maximális.

Az egyenletes körmozgás és a harmonikus rezgés kapcsolata

Induljunk ki abból, hogy egyenletes körmozgásnál a szögsebesség állandó: $\varphi = \omega t$. Ekkor az *x* koordinátát az $r\cos\varphi$, az *y*-t pedig az $r\sin\varphi$ formula adja meg. Beírva φ helyére ωt -t, kapjuk, hogy $x(t) = r\cos(\omega t)$ és $y(t) = r\sin(\omega t)$, tehát mindkét koordináta harmonikus rezgőmozgást végez.

Más szavakkal, az egyenletes körmozgás felbontható két egymásra merőleges harmonikus rezgőmozgásra, amelyek fáziskülönbsége $\pi/2$ (hisz $\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \pi/2)$).



Emiatt a hasonlóan jelölt mennyiségek nemcsak formailag hasonlóak, hanem tartalmilag is megfelelnek egymásnak: *T* a **keringési** vagy **periódusidő**, ω a **szögsebesség** vagy a **körfrekvencia**.

Az animáció segítségével tanulmányozhatja a most tanultakat:

ANIMÁCIÓ

Merőleges rezgések összetevése

Az előző fejezet utolsó mondatát meg is fordíthatjuk: két egymásra merőleges, egyforma frekvenciájú és amplitúdójú, $\pi/2$ fáziskülönbségű harmonikus rezgőmozgás szuperpozíciója körmozgást eredményez. A feltételek bármelyikét megváltoztatva a merőleges rezgések szuperpozíciója a körmozgástól eltérő mozgásra fog vezetni.

A. eltérő amplitúdók: tegyük össze az $x(t) = a\cos(\omega t)$ és $y(t) = b\sin(\omega t)$ rezgéseket. Átalakítások után az $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ egyenletet kapjuk (hiszen $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$). Ez egy *ellipszis egyenlete*, tehát az eltérő amplitúdójú (de egyforma frekvenciájú és továbbra is $\pi/2$ fáziskülönbségű) merőleges rezgőmozgások szuperpozíciója egy ellipszisen való mozgás.

B. $\pi/2$-től eltérő fáziskülönbség: belátható, hogy a szuperpozíció eredménye ilyenkor is az ellipszisen való mozgás, de ebben az esetben az ellipszis tengelyei nem a koordinátatengelyek irányába mutatnak. Speciális esetet jelent a nulla fáziskülönbség, azaz az $x(t) = a\sin(\omega t)$ és $y(t) = b\sin(\omega t)$ rezgések összetétele. A két egyenletet egymással osztva egy egyenes egyenletét ($\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$) kapjuk. A π fáziskülönbség szintén egy egyenesen történő mozgásra vezet (mivel $\sin(\omega t + \pi) = -\sin(\omega t)$), azaz ezekben az esetekben a merőleges rezgések szuperpozíciója lineáris rezgést eredményez.

C. az A) és B) eseteket összefoglalva elmondhatjuk, hogy két egyforma frekvenciájú, egymásra merőleges harmonikus rezgőmozgás szuperpozíciója elliptikus mozgást eredményez, amely speciális esetben elfajult ellipszis (kör vagy egyenes) is lehet.

D. eltérő frekvenciák: ekkor az eredő mozgás pályája igen bonyolult is lehet. Az eredő mozgás csak akkor periodikus (azaz a pályagörbe önmagába visszatérő), ha a szuperponálódó rezgések frekvenciáinak hányadosa racionális szám. Az egymásra merőleges harmonikus rezgőmozgások szuperpozíciója során adódó görbéket *Lissajous-görbéknek* nevezzük.

Az animáció segítségével tanulmányozhatja a most tanultakat:

ANIMÁCIÓ

Csillapított rezgés

A valóságban a makroszkopikus testek ritkán végeznek időben állandósult harmonikus rezgést, mivel a rezgés gyorsan vagy lassan, de csillapodik. Ezt úgy vesszük fegyelembe, hogy a rugalmas erőn kívül hat még egy sebességgel arányos fékező erő is, ennek **erőtörvénye**: $F = -kv$, ezzel a **mozgásegyenlet**:

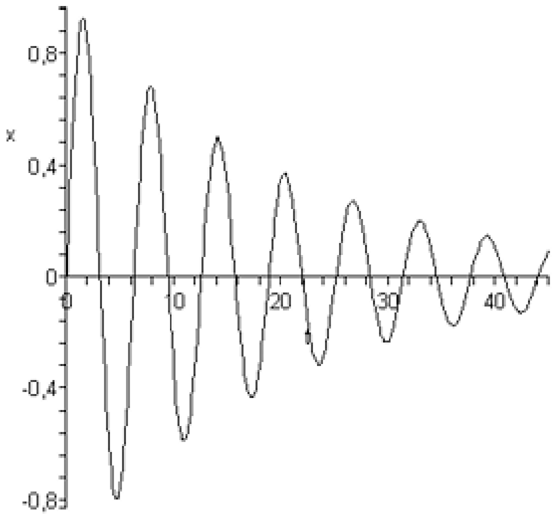
$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$$

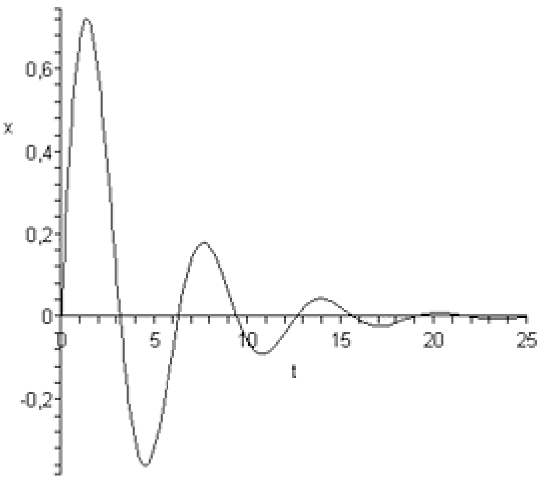
Ennek megoldása (a levezetést lásd lentebb) gyenge csillapítás ($\alpha < \omega_0$) esetére

(1)

$$x(t) = Ae^{-\alpha t}\sin(\omega t + \delta),$$

ahol $\alpha = \frac{k}{2m}$, $\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \alpha^2}$ és ${\omega_0}^2 = D/m$. A maximális kitérés tehát **exponenciálisan csökken** az idővel (a mozgási energia is csökken, ezért a fékező erőt disszipatív erőnekis hívjuk), a frekvencia pedig kisebb, mint ha nem lenne disszipáció. A folyamatot a csillapodás miatt *kváziperiódikusnak* nevezzük. Az alábbi ábrákon két csillapított rezgés kitérés-idő függvénye látható, a másodiknál α kb. négyszer akkora, mint az elsőnél.





Az animáció segítségével tanulmányozhatja a most tanultakat:

ANIMÁCIÓ

A differenciálegyenlet és megoldása

$$m\ddot{x} = -Dx - \kappa\dot{x}$$

átrendezve:

$$\ddot{x} + \frac{\kappa}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0$$

Bevezetve a két szokásos jelölést:

$$\alpha = \frac{\kappa}{2m}\ ,\ \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

A homogén, lineáris, másodrendű differenciálegyenlet:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

A megoldást keressük az alábbi formában:

$$x_p = e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\alpha\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \text{ , de } e^{\lambda t} \neq 0$$

így a karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$$

Ennek a gyökei:

$$\lambda_{12} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

A három lehetséges eset:

1. $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$: gyenge csillapítás,
2. $\alpha^2 - \omega_0^2 = 0$: kritikus csillapítás,
3. $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$: erős csillapítás.

Amennyiben a gyökök különböznek, akkor a két egymástól független partikuláris megoldás lineáris kombinációját kell venni:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Gyenge csillapítás esetén vezessük be a következő jelölést:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$\lambda_{12} = -\alpha \pm i\omega$$

A megoldás:

$$x(t) = C_1 e^{(-\alpha+i\omega)t} + C_2 e^{(-\alpha-i\omega)t} = e^{-\alpha t}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right)$$

Az Euler-relációt felhasználva:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \ ,$$

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[C_1\left(\cos\omega t + i\sin\omega t\right) + C_2\left(\cos\omega t - i\sin\omega t\right)\right] \ ,$$

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[\left(C_1 + C_2\right)\cos\omega t + i\left(C_1 - C_2\right)\sin\omega t\right] \ .$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[A\cos\omega t + B\sin\omega t\right] = Ce^{-\alpha t}\sin\left(\omega t + \delta\right) \ ,$$

Ez pedig a fentebb ismertetett *kitérés-idő függvény*.

Ha $\alpha = \omega_0$ tejesül, akkor a kritikus csillapításnak megfelelő megoldás:

$$x(t) = \left(C_1 + C_2 t\right)e^{-\alpha t}$$

Ha $\alpha > \omega_0$, akkor erős csillapítás van, ilyenkor:

$$x(t) = \left(C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t}\right)e^{-\alpha t} \text{ , ahol } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Kényszerrezgés

Ahhoz, hogy ne csillapodjon a rezgés, a disszipált energiát valamilyen módon pótolni kell. Legegyszerűbb esetben egy periodikus gerjesztő erő hat: $F_G = F_0 \sin(\omega t)$.

Ezzel a **mozgásegyenlet**:

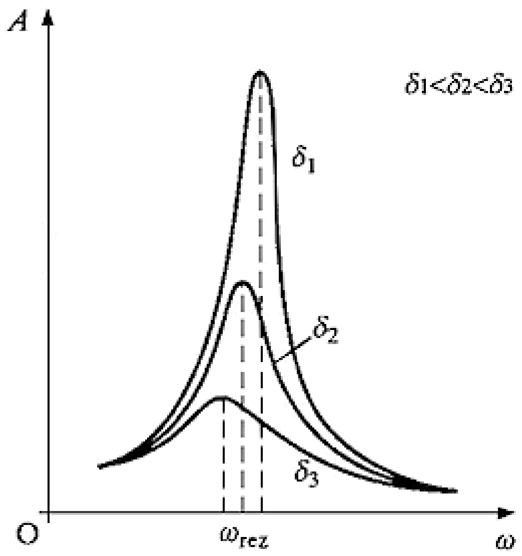
$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} + F_0 \sin(\omega t)$$

.

Ennek megoldása az előző, exponenciálisan lecsengő (1) függvény és az

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}\sin(\omega t - \delta)$$

függvény összegéből áll. Mivel az előbbi nullához tart, hosszú távon ez utóbbi, a stacionárius megoldás a lényeges, vagyis a frekvencia egyenlő a gerjesztő erő frekvenciájával. Itt δ azt jellemzi, mekkora a kitérés fáziskésése a gerjesztő erőhöz képest. δ függ az α, az ω és az ω_0 mennyiségektől. Látható, hogy ha a disszipáció kicsi ($\alpha = \frac{k}{2m}$ kicsi) és a rendszer $\omega_0 = \sqrt{D/m}$ sajátfrekvenciája közel van a gerjesztő erő ω frekvenciájához, akkor a nevező igen kicsivé, vagyis a maximális kitérés igen naggyá válik: **rezonancia** következik be. Tehát a rezonancia azt jelenti, hogy a rezgés amplitúdója, mint a gerjesztés frekvenciájának függvénye maximális értéket vesz fel. Az alábbi ábrán két, különböző disszipációhoz tartozó rezonanciagörbét láthatunk.



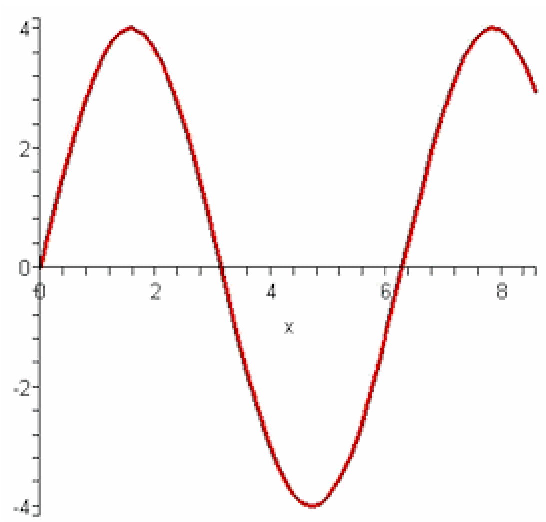
Tehát minél kisebb a csillapítás, annál élesebb, hegyesebb a rezonanciagörbe. Csillapítatlan rendszernél az $\omega = \omega_r$ helyen az amplitúdó a végtelenhez tartana, ezt nevezik *rezonancia-katasztrófának*.

Hullámok

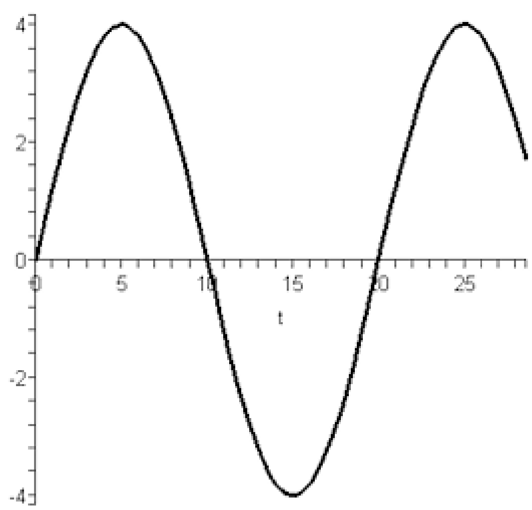
Mindannyian láttunk már egy víz felszínén haladó hullámot. Ha egy konkrét időpillanatban lefényképeznénk, azt látnánk, hogy térben (megközelítőleg) periodikus, a terjedés irányában. Ha viszont egy adott pontban vizsgáljuk az időbeli viselkedést, akkor láthatjuk, hogy hullámvölgyek és hullámhegyek haladnak át az adott ponton, időben periodikusan, tehát a folyadék felszíne harmonikus rezgőmozgást végez. Legyen *A* az a mennyiség, amelyik hullámszerűen változik, vízhullámoknál pl. a vízfelszín nyugalmi helyzethez képesti magassága. Tegyük fel, hogy a hullám *x* irányban terjed, a többi iránnyal nem foglalkozunk. A legegyszerűbb hullámfüggvény a **síkhullám**, amelynek alakja:

$$A = A_0 \sin\left(kx - \omega t\right)$$

ahol *k* a hullámszám, ω a körfrekvencia. Rögzített *x*-re *A* idő szerint periodikus, pontosabban harmonikus rezgőmozgást végez $T = \frac{2\pi}{\omega}$ periódusidővel. Hasonlóan, rögzített *t*-re pedig a térben periodikus a függvényalak.



Rögzített időpontban a kitérés helyfüggése



Rögzített helyen a kitérés időfüggése

VIDEÓ: HULLÁMGÉP

Vizsgáljuk meg a térbeli periodicitást. Tegyük fel, hogy egy adott x_1-hez van olyan x_2, hogy $A_1 = A_2$ bármely időpillanatban, azaz

$$A_0 \sin\left(kx_1 - \omega t\right) = A_0 \sin\left(kx_2 - \omega t\right)$$

Ebből következik, hogy az argumentumok egymástól 2π többszörösével térnek el. Ebből minket az érdekel, hol van az x_1-hez legközelebbi x_2, ahol $A_1 = A_2$, tehát az argumentumok legkisebb különbségét vesszük: $kx_1 + 2\pi = kx_2$, amiből $x_2 = x_1 + \frac{2\pi}{k}$.

Tehát az *x* változása $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ szerint periodikus, a λ mennyiség neve: **hullámhossz**, mértékegysége a méter. Ezeket beírva kapjuk:

$$A = A_0 \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] = A_0 \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - ft\right)\right]$$

A fenti ábrán látható példán $\lambda = 2\pi$, ebből kapjuk, hogy $k = 1$. A második ábráról $T = 20$, vagyis $f = 1/20$ és $\omega = \pi/10$. A függőleges tengelyen a kitérés van, ennek maximális értéke, az amplitúdó $A_0 = 4$, ez mindkét ábrából leolvasható.

Ez a hullám az *x* tengely pozitív irányába terjed, kérdés, milyen sebességgel. Ha *dx* távolságot megteszünk a haladás irányában (jobbra), ott *dt*-vel később zajlik le minden (pl. ugyanaz a hullámvölgy *dt* idővel később ér oda), vagyis ha *x*-hez hozzáadunk *dx*-et és *t*-hez hozzáadunk *dt*-t, az argumentum nem változik:

$$\frac{x + dx}{\lambda} + ft = \frac{x}{\lambda} + f\left(t + dt\right)$$

ebből $\frac{dx}{\lambda} = fdt$, azaz $\frac{dx}{dt} = f\lambda$, vagyis kaptunk egy fontos összefüggést a hullám terjedési sebességének nagyságára:

$$\boxed{c = f\lambda}$$

Ezzel $A = A_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right]$

Hanghullám esetén *c* a hangsebesség, fényhullám esetén a fénysebesség. Ismeretes, hogy az emberi fül számára (közelítően, kortól is függően) a 20Hz és 20kHz közötti frekvenciájú hangok hallhatóak. Az alacsonyabb frekvenciájú hangokat infrahangnak, a magasabbat ultrahangnak nevezzük.

Ha *A* vektormennyiség, a hullámokat két csoportba oszthatjuk: transzverzális hullámnál $\vec{A}$ merőleges a terjedés irányára (ilyenek pl. a vízhullámok), longitudinális hullámnál egy egyenesbe esnek. Utóbbira példa, ha egy vékony rúd végére ráütünk a rúd hossztengelye irányába mutató sebességgel, ekkor az $\vec{A}$ mennyiségnek a részecskék egyensúlyi helyzetétől való kitérése felel meg, ez pedig a rúd hossztengelyének irányába mutat, emellett a hullám is a rúd megütött végétől a másikig terjed, a két irány megegyezik.

Ha a síkhullám közeghatárhoz ér, azon visszaverődhet. Ekkor a visszavert hullám az eredetivel interferál. Bizonyos feltételek fennállása esetén a két hullám eredője *állóhullám* lehet. Ezekben a hely- és az időfüggés szétcsatolódik: a harmonikus rezgés amplitúdója helyfüggővé válik, egyes helyeken zérus (csomópont), máshol maximális (duzzadóhely) lesz. A fázisából viszont eltűnik a helyfüggés, abban csak az időtől való függés marad meg. Ezzel megszűnik a hullámban a fázisállapot terjedése, állóhullám alakul ki (ekkor a $c = f\lambda$ képlet értelmetlenné válik).

Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy egy pozitív és egy negatív irányba haladó, egyébként ugyanolyan hullám találkozik: $A_0 \sin(kx - \omega t)$ és $A_0 \sin(kx + \omega t)$. Ekkor a kitérések minden pontban és minden időpillanatban összeadódnak. A $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$ és a $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$ azonosságok felhasználásával kapjuk, hogy az eredő hullámot a $2A_0 \sin(kx) \cdot \cos(\omega t)$ függvény írja le, tehát állóhullámot kaptunk. Ezt demonstrálja az alábbi animáció.

ANIMÁCIÓ

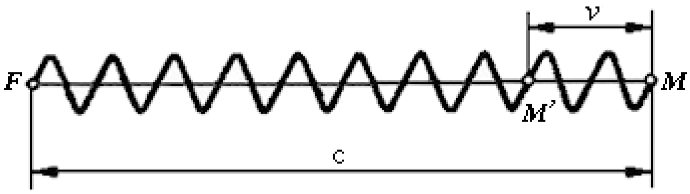
A Doppler-effektus

Christian Doppler
(1803-1853)
osztrák fizikus 1847 és 1849 között a Miskolci Egyetem jogelőd intézményében, a selmecbányai Bányászati és Erdészeti Akadémián a matematika, fizika és mechanika professzora volt. [ii]

Ha a hullámforrás és a megfigyelő egymáshoz képest mozog, akkor a megfigyelő a hullám frekvenciáját és hullámhosszát a kibocsájtott hullámétól eltérőnek érzékeli. Ez az effektus, amely a felfedezőjéről a **Doppler-effektus** nevet kapta igen sok műszaki alkalmazásnak (pl. lézeres, radaros vagy ultrahangos sebességmérés) képezi alapját.

Mi itt most az akusztikai Doppler-effektussal foglalkozunk, erre mindenkinek lehet hétköznapi tapasztalata is. Például a közeledő vonat füttyét magasabbnak halljuk, mint amikor már távolodik tőlünk. Tekintsük a legegyszerűbb esetet, amikor a hangforrás, illetve megfigyelő sebessége az őket összekötő egyenesen van.

A közegben nyugvó hullámforráshoz (F) képest *v* sebességgel mozgó megfigyelő (M) időegység alatt nemcsak az f számú rezgést fogja fel, hanem azokat is, amelyek a *v* hosszúságú szakaszra esnek (v/λ).

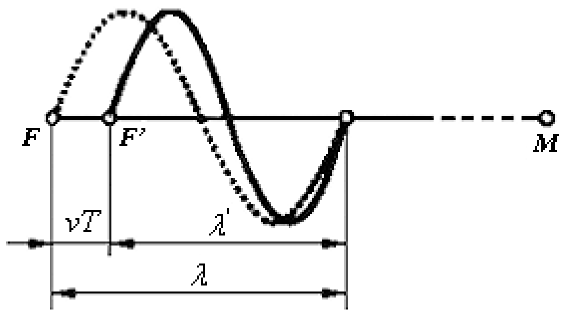


Ennek megfelelően a megfigyelő által észlelt frekvencia

$$f' = f\left(1 \pm \frac{v}{c}\right)$$

ahol a + jel a közeledő, a – jel a távolodó megfigyelőre vonatkozik.

Ha a hullámforrás mozog a közegben nyugalomban lévő megfigyelőhöz képest, akkor (közeledő forrás esetén) a rezgés első fázisát még távolabb bocsájtja ki, mint (T idő múlva) az utolsó fázisát.



Ez az ábrán is mutatott módon a hullámhossz lerövidülését okozza

$$\lambda' = \lambda - vT$$

amely a

$$f' = f\frac{1}{1 \mp \frac{v}{c}}$$

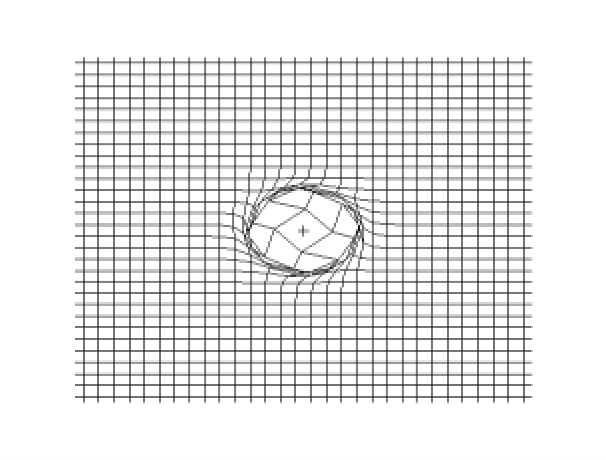
módosult frekvenciára vezet. Itt a – előjel a fenti esetre, a + pedig a távolodó forrásra vonatkozik.

ANIMÁCIÓ

HULLÁMOK GYAKORLATI ALKALMAZÁSA: SZEIZMOLÓGIA

A földtudományokban is alkalmazott "eszköz" a rugalmas hullám. A földben terjedő rugalmas hullámok vizsgálatával, mérésével és feldolgozásával foglalkozó tudomány a szeizmológia. A szeizmológia jóvoltából van információnk a Föld öves felépítéséről és a földerengésekről. A rugalmas hullámok mérnöki alkalmazásokat nyerő tudománya pedig a szeizmika.

A Földben terjedő rugalmas hullámok típusa lehet longitudinális és transzverzális. Ezek többféle módon keletkezhetnek pl.: földrengés, robbantás, kalapácsütés, stb. A longitudinális hullámok terjedési sebessége nagyobb, mint a transzverzális hullámoké. Szokásos rövidítés az, hogy a longitudinális hullámokat P (primer), míg a transzverzális hullámokat S (szekunder) hullámoknak nevezzük az érzékelő műszerbe való beérkezési sorrendnek megfelelően. A földtani képződményekben a hullámterjedés sebessége a kőzet minőségétől függ. Nyilvánvaló, hogy egy kompaktabb, repedésmentes kőzetben (pl.: mélységi magmás kőzetek) nagyobb a hullámterjedés sebessége, mint egy laza, szemcsés üledékben, pl.: homokban. Hullámterjedés szempontjából fontos befolyásoló tényező még a kőzetek sűrűsége is.



P- és S-hullámok terjedése

A szeizmikában rezgéskeltő (pl.: robbantás, kalapácsütés) és rezgésérzékelő (geofon) műszerek segítségével a rezgéskeltés és a rezgésérzékelés között eltelt időt mérik. Ezután az így kapott beérkezési időket feldolgozzák, majd ebből következtetéseket vonnak le a felszín alatt lévő képződmények elhelyezkedéséről, tulajdonságairól. A szeizmikus módszerekkel nyersanyag kutatási (pl.: kőolaj, földgáz), mérnökgeológiai és hadászati feladatokat végeznek. Egy érdekes alkalmazása még a szeizmológiának az atombomba robbantások helyének és idejének ellenőrzése. Ugyanis, egy atombomba keltette hullám egyértelműen megkülönböztethető egy, a földrengésekkor keletkezőtől. Ezek után nem meglepő, hogy a hidegháború idején miért költöttek rengeteg pénzt szeizmológiai obszervatóriumok létesítésére a világ különböző pontjain.

4. Körmozgás dinamikája

Egyenletes körmozgás

A körmozgást végző test sebességvektora folyamatosan a középpont felé igyekszik fordulni, azaz a gyorsulásának van a sebességre merőleges komponense is. Ezt a gyorsulást *centripetális* gyorsulásnak nevezzük (lásd a kinematikánál). Ennek dinamikai feltétele az, hogy a testre ható erők eredőjének legyen a körpálya középpontja felé mutató komponense is. Ezt az erőkomponenst szokás **centripetális erőnek** is nevezni, és a mozgás adatainak ismeretében a következőképpen számíthatjuk ki:

$$F_{cp} = ma_{cp} = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2$$

Ez az erő szükséges ahhoz, hogy a testet az adott körpályán tartsa, vagyis hogy a sebesség irányát folyton változtassa, azaz centripetális gyorsulást okozzon. Hangsúlyozzuk, hogy ez a képlet nem erőtörvény. A centripetális erő eredete lehet gravitációs vagy elektromos (Coulomb) erő, kötélerő, stb., tehát egy konkrét esetben valamilyen konkrét erőtörvénnyel leírható erő vagy erőkfunkcionálnak centripetális erőként.

Mivel a centripetális erő merőleges a sebességre, nem végez munkát, nem változtatja meg a test mozgási energiáját. Ez összhangban van azzal a kinematikában tanult állítással, hogy a centripetális gyorsulás csak a sebesség irányát változtatja meg, a nagyságát nem.

A szögsebességet vektorként is értelmezhetjük, ehhez meg kell mondanunk, milyen irányba mutat. Ha egy tömegpont egyenletes körmozgást végez pl. az *x-y* síkban, akkor a szögsebesség-vektor iránya merőleges erre a síkra, vagyis a *z* tengely pozitív vagy negatív irányába mutat. Hogy a kettő közül melyikbe, azt a jobbkéz-szabállyal állapíthatjuk meg: ha jobb kezünk behajlított ujjai mutatnak a pont haladási irányába, akkor hüvelykujjunk mutatja meg $\vec{\omega}$ irányát.

Számolási Feladat

Feladat

Egy bakelit-lemezjátszó korongjára a középponttól 15cm távolságra egy kis testet helyezünk. Mekkora a tapadási súrlódási együttható, ha a test $\omega = 4 \cdot 1/s$ szögsebességnél csúszik meg?

Megoldás: Itt is a $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ alapegyenletből indulhatunk ki. A testre három erő hat, a súlya, a lemez által kifejtett *T* tartóerő és a tapadási súrlódási erő. Tehát

$$\sum \vec{F} = \vec{G} + \vec{T} + \vec{S}$$

A test függőlegesen nem mozog, tehát a függőleges erők (*G* és *T*) kiegyenlítik egymást. A test, amíg nem csúszik meg, egyenletes körmozgást végez, tehát centripetális gyorsulása van, az erők eredője centripetális erő. Ezt csakis a súrlódási erő adhatja, csak ez kényszerítheti körpályára:

$$S = ma_{cp}$$

A test és a lemez felülete között ható nyomóerő a *T* tartóerő, ami megegyezik a test súlyával. Ezt használjuk ki a (tapadási) súrlódás kiszámításánál: $S = \mu mg$.

A centripetális erőt az

$$F_{cp} = mr\omega^2$$

képlettel számoljuk ki. A kérdés az, hogy elég nagy-e *S* maximális értéke, hogy adott szögsebességű körmozgásra kényszerítse a testet. A határeset az a kritikus ω_k szögsebesség, amikor a kettő egyenlő:

$$mr\omega_k^2 = \mu mg$$

Ha ennél nagyobb a szögsebesség, a test megcsúszik. A μ-t kifejezve:

$$\mu = \frac{r\omega_k^2}{g} = \frac{0{,}15 \cdot 4^2}{10} = 0{,}24$$

AZ EGYENLETESEN FORGÓ RENDSZEREKBEN FELLÉPŐ TEHETETLENSÉGI ERŐK

Egy ω szögsebességgel egyenletesen forgó rendszerben a forgástengelytől *r* távolságra nyugvó tömegpontnak tehát a forgástengely felé mutató centripetális gyorsulása van: $a_{cp} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$. Ezt a gyorsulást a testre ható erők eredője – amelyet centripetális erőnek is nevezünk – hozza létre:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{cp} = m\overrightarrow{a_{cp}}$$

Az ebben a rendszerben elhelyezkedő megfigyelő a tömegpontot nyugvónak látja, amit egy $\vec{F}_{cp}$-t "kompenzáló" $-m\overrightarrow{a_{cp}}$ tehetetlenségi erő felléptével magyaráz. Ezt a fiktív, csupán a forgó rendszerbeli megfigyelő által tapasztalt, sugárirányban kifelé röpítő erőt **centrifugális erő**nek ($\vec{F}_{cf}$) nevezzük. Ennek nagysága a fentiek alapján tehát:

$$\vec{F}_{cf} = m\vec{r}\omega^2$$

ahol $\vec{r}$ a tömegponthoz húzott helyvektor.

Ha a tömegpont még mozog is $\vec{v}$ sebességgel (az egyenletesen forgó vonatkoztatási rendszerhez képest), akkor egy második tehetetlenségi erőnek a felléptével is számolni kell: ez a **Coriolis-erő**. Megmutatható, hogy ennek nagysága:

$$\vec{F}_{Cor} = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}$$

A Coriolis-erő, mivel merőleges a sebességre, mindig eltérítő erő, például egy sugárirányban elindított testet mindig letérít a sugárról.

A centrifugális erő és a Coriolis-erő különösen fontos szerepet kapnak a mozgások Földhöz rögzített rendszerbeli leírásakor. Például elsősorban a centrifugális erő tehet arról, hogy az egyenlítőn az ugyanakkora tömeg kisebb súlyú, mint a sarkokon. A Coriolis-erőre pedig közismert példa az, hogy a ciklonok mindig egy irányba (pl. az északi féltekén az óramutató járásával megegyezően) forognak.

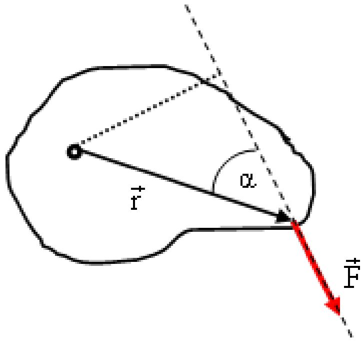
Változó körmozgás

Forgatónyomaték

Először tetszőleges irányú erőre definiáljuk az origóra vonatkoztatott **forgatónyomaték** vektort:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

ahol $\vec{r}$ az origóból az erő támadáspontjához húzott helyvektor.



A forgatónyomaték-vektor iránya merőleges az $\vec{r}$ és $\vec{F}$ által meghatározott síkra, ami most az ábra síkja, $\vec{M}$ pedig kifele vagy befele mutat. Hogy a kettő közül melyikbe, azt a jobbkéz-szabállyal állapíthatjuk meg: ha a hüvelykujjunk mutat az $\vec{r}$, a mutatóujjunk az $\vec{F}$ irányába, a középső ujjunkat az $\vec{M}$ irányába tudjuk beállítani. Az ábrán látható esetben $\vec{M}$ befelé mutat.

Rögzített tengely esetén, ha az erő a tengelyre merőleges síkban van, akkor az egyszerűbb képletet használhatjuk: $M = kF$, itt ***k* az erőkar, vagyis az erő hatásvonalának a (rögzített) tengelytől való távolsága**. Az ábrán az erő hatásvonala szaggatott, az erőkar pontozott vonallal van feltüntetve.

Impulzusmomentum

Az **impulzusmomentum** (*perdület*) általános definíciója: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{I} = m\vec{r} \times \vec{v}$. Sok esetben kiszámolhatjuk a vektor nagyságát az $L = mrv = mr^2\omega$ képletekkel. Az impulzusmomentum-vektor irányítását a szögvegsebességéhez hasonlóan adjuk meg [2]: ha egy tömegpont egyenletes körmozgást végez az *x*-*y* síkban, akkor az impulzusmomentum-vektor iránya merőleges erre a síkra, vagyis a *z* tengely pozitív vagy negatív irányába mutat, a jobbkézszabálynak megfelelően. Az impulzusmomentum-vektor csak akkor változhat, ha a tömegpontra forgatónyomaték hat:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \vec{v}) = m(\frac{d}{dt}\vec{r} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d}{dt}\vec{v}) = m(\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a}) = m \cdot (\vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M},$$

ahol felhasználtuk, hogy bármely vektor önmagával vektoriálisan szorozva nullát ad. Azt a fontos állítást kaptuk, hogy **a tömegpont impulzusmomentumának idő szerinti deriváltja egyenlő a tömegpontra ható forgatónyomatékkal**. Ez az **impulzusmomentum-tétel**, nem csak körmozgásra igaz. Tehát ha az eredő erő forgatónyomatéka nulla, akkor a perdület állandó. Az ábrán látható esetben a test az óramutatóval megegyező irányban gyorsulva forog, tehát az $\vec{L}$ vektor befelé mutat és növekszik, összhangban azzal, amit a forgatónyomaték irányáról mondtunk.

PÉLDA

PÉLDA 1.

Egyenletes körmozgásnál csak centripetális erő hat (pontosabban az erők eredője mint centripetális erő működik). Az impulzusmomentum állandó, a középpontra vett forgatónyomaték nulla.

PÉLDA

PÉLDA 2.

Tegyük fel, hogy egy pont az *x*-*y* síkban körmozgást végez úgy, hogy az impulzusmomentum-vektor *z* irányba mutat, továbbá a forgatónyomaték-vektor iránya szintén *z*, nagysága állandó. Ekkor $\vec{L}$ változási gyorsaságának iránya (*z*) megegyezik $\vec{L}$ irányával, vagyis $\vec{L}$ növekszik, tehát egyenletesen gyorsuló körmozgás jön létre.

Tehetetlenségi nyomaték

Ha feltesszük, hogy a pont rögzített tengely körül rögzített távolságban mozoghat, akkor ebben a speciális esetben $L(t) = mr^2\omega(t)$. Ezt idő szerint deriválva,

$$\dot{L}(t) = mr^2\dot{\omega}(t) = mr^2\beta(t)$$

ahol β a szöggyorsulás. Ha az mr^2 mennyiséget elnevezzük a tömegpont **tehetetlenségi nyomatékának**:

$$\theta = mr^2$$

(a θ görög betű, ejtsd: "teta") ahol *r* a tengelytől való távolság, akkor az impulzusmomentum-tétel felhasználásával a feladatmegoldások során is gyakran használt formulához jutunk, amit a **forgó mozgás alapegyenletének** is neveznek:

$$\boxed{M = \theta\beta}$$

Ez a képlet teljesen hasonló szerkezetű az $F = ma$ képlethez, csak körmozgásnál a gyorsulás helyett a szöggyorsulás, a tömeg helyett a tehetetlenségi nyomaték, az erő helyett a forgatónyomaték játszik szerepet.

A tömegpont mozgási energiája:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}\theta\omega^2$$

Itt is teljesen hasonló szerkezetű a két mozgási energiára vonatkozó képlet.

Hasznos lehet a következő analógia-táblázat:

	Haladó mozgás (1 dimenzió)	**Forgó mozgás**
változó	x	φ
(szög)sebesség	v_x	ω
(szög)gyorsulás	a_x	β
tehetetlenség	m	θ
A (szög)gyorsulás oka	$F_x = m a_x$	$M = \theta\beta$
Impulzus(momentum)	$I_x = m v_x$	$L = \theta\omega$
Kinetikus energia	$\frac{1}{2} m v_x^2$	$\frac{1}{2} \theta\omega^2$
munka	$F_x \Delta x$	$M\Delta\varphi$
teljesítmény	$F_x v_x$	$M\omega$

Bolygók mozgása

Tegyük fel, hogy egy *m* tömegű test egy másik, nagy tömege miatt rögzítettnek tekintett *M* test **(Newton-féle) gravitációs erőterében** mozog, kering. Ekkor neki kétféle energiája van, kinetikus és **potenciális**. Utóbbit csak úgy tudjuk értelmezni, ha kijelöljük a kezdőpontot, a nulla szintet. Logikus, hogy akkor legyen a potenciális energia nulla, ha a keringő test nem áll kölcsönhatásban semmivel, vagyis végtelen távol van (nincs kölcsönhatás - nincs hozzá tartozó energia). Ekkor viszont a korábban levezetettek szerint a potenciális energia negatív. Ha az összenergia is negatív (tehát E_p abszolút értékben nagyobb, mint E_k), akkor a *m* test nem tud eltávolodni a végtelenbe, a *M*-hez van kötve, ekkor kötött állapotról beszélünk.

Kepler törvények

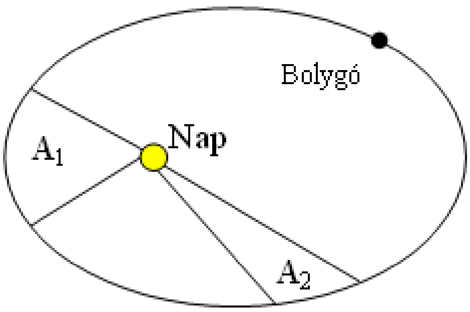
Johannes Kepler (1571-1630) német matematikus, csillagász és optikus volt. **[iii]**

Keplerről nevezték el a bolygómozgás három törvényét. Ezek bármely olyan testre vonatkoznak, amely egy másik test gravitációs erőterében kötött állapotban mozog, tehát pl. a Föld körül keringő Holdra is.

I. törvény: A bolygók pályája ellipszis, és annak egyik gyújtópontjában a Nap áll.

II. törvény: (Felületi törvénynek vagy területi tételnek is szokták nevezni.) A bolygók napközelben gyorsabban mozognak, mint a Naptól távol. A bolygók vezérsugara (a bolygót a Nappal összekötő szakasz) azonos idők alatt azonos területet súrol. (Az ábrán $A_1 = A_2$ ha ugyanannyi ideig tartott a megfelelő íveken végighaladni)

III törvény: Az ellipszispályák nagytengelyeinek (a) köbei úgy aránylanak egymáshoz, mint az adott pályákon keringő bolygók keringési idejének (*T*) négyzetei, vagyis az a^3 / T^2 hányados minden naprendszerbeli bolygó esetén ugyanakkora. (Körpálya esetén a nagytengely helyett természetesen átmérőt kell érteni.)



Az animáció segítségével tanulmányozhatja a most tanultakat:

ANIMÁCIÓ

Mind a három törvény bebizonyítható a Newton axiómákból és a Newton-féle gravitációs erőtörvényből. A valóságban a leszármaztatás inkább fordítva történt, Kepler hamarabb alkotta meg a törvényeit, mint Newton.

A II. törvény az **impulzusmomentum**-megmaradásból következik, de csak egy leegyszerűsített magyarázatot adunk rá. Az origót a Nap középpontjában felvéve a Napból a bolygóhoz húzott helyvektor és a Nap által a bolygóra kifejtett erő közötti szög nulla, így a forgatónyomaték is nulla, tehát a perdület állandó. Ez viszont egyenesen arányos a vezérsugárral és az arra merőleges sebességkomponenssel, vagyis ha az egyik nő, a másiknak csökkennie kell.

Csak a III. törvényt bizonyítjuk, azt is csak körmozgásra. Azt használjuk ki, hogy a **centripetális erőt** a **(Newton féle) gravitációs vonzóerő** adja. Az első bolygóra:

$$F_1=\gamma\frac{m_1 M}{R_1^2}=m_1 a_{cp1}=m_1 R_1 \omega_1^2$$

azaz

$$\gamma M=R_1^3\omega_1^2=R_1^3\frac{(2\pi)^2}{T_1^2}$$

Ezt felírva a 2. bolygóra is:

$$\gamma M=R_2^3\frac{(2\pi)^2}{T_2^2}$$

és a két egyenletet elosztva egymással adódik, hogy

$$\frac{R_1^3}{T_1^2}=\frac{R_2^3}{T_2^2}$$

ami körpályára ekvivalens az állítással.

5. Ellenőrző kérdések

TÖMEGPONT DINAMIKÁJA (1.)

Többször megoldható feladat, **elvégzése kötelező**.
A feladat végső eredményének a mindenkori **legutolsó megoldás** számít.

Válassza ki a helyes megoldást!

1. **Egy 3 kg tömegű testet 30 m magasról leejtünk, de amikor a földbe csapódik, sebessége csak 20 m/s. Mennyi volt a súrlódási erő munkája?**

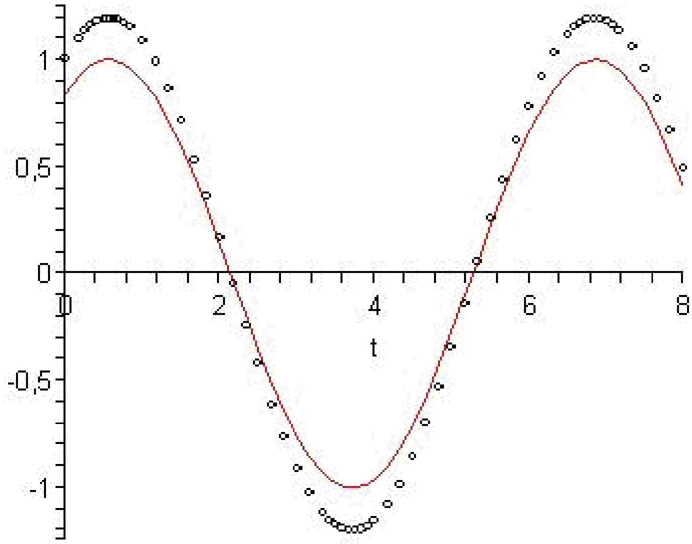
   ○ 300 J

   ○ A súrlódási erő munkája elhanyagolható.

   ○ 60 J

○ 600 J

2. A harmonikus rezgőmozgást végző test milyen jellemzőinek időfüggését láthatjuk az alábbi grafikonon?



○ sebesség és impulzus

○ kitérés és sebesség

○ sebesség és gyorsulás

○ kitérés és impulzus

○ gyorsulás és impulzus

○ mozgási energia és gyorsulás

3. Egy tömegpont csillapított rezgőmozgást végez. Melyik mennyiség nem változik az idővel?

○ mechanikai energia

○ amplitúdó

○ impulzus

○ frekvencia

4. Egy síkhullám esetén az egymástól a hullám terjedési irányában $\frac{\lambda}{4}$ távolságra lévő pontok fáziskülönbsége

○ $\frac{\pi}{2}$

○ 2π

○ π

○ 0

○ $\frac{\pi}{4}$

5. Egy bolygó ellipszispályán kering a Nap körül. Napközelben vagy naptávolban nagyobb az impulzusa?

○ napközelben

○ attól függ, melyik bolygóról van szó

- mindig ugyanakkora az impulzusmegmaradás miatt
- naptávolban

6. **Van két test, az első tömege kétszer akkora, mint a másodiké. Mindkét test álló helyzetből indul és időben állandó nagyságú és irányú eredő erő hat rájuk, az elsőre négyszer akkora, mint a másodikra. Azt szeretnénk, ha mindkét test egy métert haladna. Hányszor annyi idő kell ehhez a második testnek?**

   - kétszer
   - egyiksem
   - negyede
   - fele
   - nyolcszor
   - négyszer

7. **Melyik erőnek nem lehet pozitív a munkavégzése?**

   - Coulomb-erő
   - gravitációs erő
   - kötélerő
   - centripetális erő
   - rugóerő

8. **Egy tömegpont harmonikus rezgést végez, a rugóerőn kívül más erő nem hat. Ekkor a kinetikus és a potenciális energia összege...**

   - nem változik
   - szinuszosan változik
   - lineárisan nő
   - exponenciálisan csökken
   - szinusz-négyzetesen változik
   - lineárisan csökken

TÖMEGPONT DINAMIKÁJA (2.)

Többször megoldható feladat, **elvégzése kötelező**.
A feladat végső eredményének a mindenkori **legutolsó megoldás** számít.

Válassza ki a helyes megoldást!

1. **Egy m tömegű test egy rugóra van felfüggesztve és harmonikus rezgőmozgást végez A amplitúdóval, T periódusidővel. Hányszorosára nő a periódusidő, ha 4 m tömegű testet akasztunk a rugóra és az A/4 amplitúdóval rezeg?**

   - negyedére csökken
   - 4

- 8
- 16
- felére csökken
- 2
- nem változik

2. Egy testre ható eredő erő iránya minden pillanatban merőleges a mozgás irányára. Ekkor mindenképp igaz, hogy...

- a test rezgőmozgást végez
- a test sebességének nagysága növekszik
- a test sebességének nagysága állandó
- a test impulzusa növ
- a test sebességének nagysága csökken
- a test egyenesvonalú mozgást végez

3. Az alábbi rendszerek közül melyikre érvényes az impulzusmegmaradás?

- egy test és a rugó, amelyre fel van függszetve, harmonikus rezgés közben
- egy kalapácsvető és a kalapács, miközben elröpíti
- két jégkorongozó ütközik a jégen
- egy antik óra ingája lengés közben
- egy motoros kanyarodás közben

4. Egy test harmonikus rezgőmozgást végez, összes energiája 400 J. Mekkora a potenciális energiája, amikor a kitérés az amplitúdó negyede?

- 200 J
- 25 J
- 100 J
- 6,25 J
- 12,5 J
- 50 J

5. Egy motoros háromféleképpen mozoghat ugyanazon sebességgel. 1. közeledik felénk. 2. távolodik tőlünk, 3. olyan körpályán mozog, amelynek mi vagyunk a középpontjában. Rendezze magasság szerint növekvő sorrendbe a hallott hangokat!

- mindig ugyanolyan magasságú hangot hallunk, 1.=2.=3.
- 3., 2., 1.
- 1.=2., 3.
- 2., 3., 1.

- 3, 1.=2.

6. **Egy tömegpont egyenletes körmozgást végez az x-y síkban az origo körül, a (0,5) pontból indulva. Hogyan függ ekkor a centripetális erő x komponense az időtől?**

- szinuszosan változik
- exponenciálisan csökken
- ln(t) szerint nő
- lineárisan nő
- állandó
- 1/t szerint csökken

7. **Egy bolygó ellipszispályán kering a Nap körül. Melyik rá jellemző mennyiség állandó?**

- tangenciális gyorsulás
- sebesség
- impulzus
- centripetális gyorsulás
- impulzusmomentum

[1] Hangsúlyozzuk, hogy itt nem időbeli változásról van szó, hiszen az erő nem függ explicite az időtől!

[2] Ez több pontból álló rendszerre nem ilyen egyszerű, az $\vec{\omega}$ és az $\vec{L}$ vektorok nem feltétlenül egy irányúak.

BIBLIOGRÁFIA:

[i] Sir Godfrey Kneller alkotása (public domain)

[ii] Forrás: public domain

[iii] Forrás: public domain