Kovács Endre, Paripás Béla,

Fizika II.

1

Új Magyarország Fejlesztési Terv

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

I. Elektrosztatika

1. Elektromos alapjelenségek

Bizonyos testek (borostyánkő, üveg, ebonit) megdörzsölve apró tárgyakat magukhoz vonzanak. A tapasztalat szerint két, bőrrel megdörzsölt apró üvegdarab között taszítás, egy bőrrel dörzsölt üveg és egy gyapjúval dörzsölt borostyánkő között vonzás lép fel. Az elektromos állapot érintéssel átvihető egyik testről a másikra. Ha a megdörzsölt üvegrudat hozzáérintjük szigetelőtalpon álló fémpohárhoz, akkor a fémpohár élén a piciny alufólia, mint egy elektroszkóp elektromos állapotot jelez, a taszító hatás miatt szétáll.

ANIMÁCIÓ

Ha két összeillesztett fémtesthez megdörzsölt üvegrudat közelítünk, akkor az elektromos állapotú rúd hatására mindkét fémtest elektromos állapotba kerül. Az üvegrúd jelenlétében szétválasztva őket, majd az üvegrudat eltávolítva az elektromos állapot megmarad. A két fémtest elektromos állapota azonban különböző, az egyiket vonzza, a másikat taszítja a megdörzsölt üvegrúd.

ANIMÁCIÓ

A fenti alapjelenségekből arra a következtetésre juthatunk, hogy kétféle elektromos állapot van. A bőrrel megdörzsölt üvegdarabot - önkényesen - pozitív elektromos állapotúnak nevezzük. A másik elektromos állapot – a megdörzsölt borostyánkőé – értelemszerűen negatív lesz. Megjegyezzük, hogy az elektromosság elnevezés a borostyánkő görög nevéből származik.

Elektromos **töltés**nek nevezzük azt a mennyiséget, amely megmutatja, hogy a test milyen mértékben vesz részt az elektromos kölcsönhatásban. Az elektromos töltés jele *Q*. Amelyik testre ugyanabban a mezőben *k*-szoros erő hat, annak töltése is *k*-szoros. A töltés előjeles mennyiség. A tapasztalat szerint az egynemű töltések taszítják egymást, különnemű töltések vonzzák egymást. A töltés érintéssel átvihető az egyik testről a másikra. A semleges testen is van töltés de a $\oplus$ és – töltések egyforma mennyiségben vannak jelen.

A fenti kísérlet azt mutatja, hogy az elektromos töltés szétválasztható, megosztható, a jelenség neve elektromos megosztás vagy *influencia*. Ehhez az szükséges, hogy a töltéshordozók a testben makroszkopikusan elmozdulhassanak. Az olyan testeket, amelyekben a töltések erre képesek, elektromos vezetőknek hívjuk. Szigetelők esetén a töltések elmozdulása csak mikroszkopikus méretű, a molekula méretével azonos nagyságrendű, $10^{-9} - 10^{-10} m$ lehet. Az ezzel kapcsolatos jelenséget polarizációnak nevezzük. Tapasztalataink szerint az elektromos töltés *megmaradó mennyiség*, nem keletkezhet, és nem tűnhet el.

2. Az elektromos tér vákuumban

Coulomb törvény

Coulomb mérései (1785) szerint két nyugvó pontszerű elektromos töltés között fellépő erő nagysága arányos a töltésekkel és fordítottan arányos a pontok távolságának négyzetével.

$$\boxed{F = k\frac{qQ}{r^2}}$$

A $k > 0$ pozitív állandót **Coulomb állandó**nak nevezzük, értéke a töltésegység megválasztásától függ. A töltés egysége SI-ben a coulomb (C). Régebben ezt a fenti törvény alapján definiálták, mai definíciója az áramerősség egységén alapul, amit később adunk meg. Közelítőleg igaz az, hogy egy 1 C töltésű pontszerű test egy másik ugyanakkora töltésű, tőle vákuumban 1 m-re levő pontszerű testet $9 \cdot 10^9\,N$ erővel taszít. Ekkor *k* értéke: $k \approx 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$. A Coulomb állandó felírható a **vákuum permittivitásával** (ε_0) kifejezve:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Ekkor természetesen $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{Nm^2}{C^2}$.

Mivel az inerciarendszerben nyugvó ponttöltés mezője konzervatív, a szuperpozíció elve értelmében bármilyen, az inerciarendszerben nyugvó töltéselrendezés is konzervatív elektromos mezőt kelt, ezt elektrosztatikus mezőnek nevezzük.

Az elektromos térerősség

Az elektromos mező pontról pontra történő jellemzéséhez próbatöltéseket (pontszerű töltött testeket) használunk. A próbatöltésre ható erő a tapasztalat szerint arányos a töltésével, a két mennyiség hányadosa már független a próbatöltés töltésétől, kizárólag a mezőt jellemzi a pontszerű töltés helyén. Ezt nevezzük **elektromos térerősség** vektornak, jele $\vec{E}$. Magyarul az elektromos térerősség megadja a kérdéses pontba helyezett pozitív egységnyi töltésre ható erőt, irány és nagyság szerint. A tér jellemző iránya a pozitív töltésre ható erő irányával egyezik meg.

$$\vec{E}(P)=\frac{\vec{F}(P)}{q}$$

A térerősség mértékegysége: $[E]=1\frac{N}{C}=1\frac{V}{m}$

Ha két vagy több töltés létesíti a mezőt, akkor a térerősség az egyes töltések által külön-külön létesített mezőkhöz tartozó térerősségek vektori összege. Ez a **szuperpozíció** vagy független hatás elve, Newton negyedik törvényéből következik: $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$, azaz $q\vec{E}=q\vec{E}_1+q\vec{E}_2$, így

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$$

A feszültség és az elektrosztatikus mező első alaptörvénye

Az elektrosztatikus mezőben a két pont között a *q* próbatöltésen az elektromos mező által végzett munka:

$$W_{AB}=\int_A^B \vec{F}d\vec{r}=\int_A^B q\vec{E}d\vec{r}=q\int_A^B \vec{E}d\vec{r}\ .$$

Definíció szerint a két pont közötti feszültség az egységnyi próbatöltésen a két pont között a mező által végzett munka:

$$U_{AB}=\frac{W_{AB}}{q}=\int_A^B \vec{E}d\vec{r}$$

Homogén térben a térerősség-vektorral párhuzamos *d* nagyságú elmozdulás esetén ez a formula leegyszerűsödik:

$$\boxed{U=Ed}$$

Az elektromos (más elnevezésben: villamos) feszültség független a próbatöltéstől, csak a mezőre és a benne felvett két pontra jellemző. Az elektromos feszültség számértéke megmutatja, hogy az elektromos mező az egységnyi pozitív töltésen mennyi munkát végez, miközben az egyik pontból a másikba szállítja. Így a feszültség egysége 1V=1J/C.

Ismeretes, hogy konzervatív mezőben, ha kijelölünk egy kitüntetett *A* kezdőpontot, bármely másik (pl. *B*) pont jellemezhető azzal, hogy mekkora munkát végez az erő, ha a *B*-ből az *A*-ba megy a test. Ezt a munkát úgy hívjuk, hogy a test potenciális (vagy helyzeti) energiája a *B* pontban. Az elektrosztatikus mező konzervatív, azaz ha a *q* töltés elmozdul az A pontból a B-be, a ***mező által*** végzett munka éppen a kezdő és végpontbeli potenciális energia különbségével egyenlő:

$$W_{A,B}=\int_A^B \vec{F}d\vec{r}=E_p(A)-E_p(B)\ .$$

Az egységnyi töltés potenciális energiáját az elektromos mezőben potenciálnak nevezzük:

$$U=\frac{E_p}{q}\ .$$

Az elektrosztatikus mezőben a feszültség egyben a potenciálkülönbség is.

$$U_{A,B} = \int_A^B \vec{E} d\vec{r} = U(A) - U(B)$$

Az elektrosztatikus potenciál egy állandó erejéig határozatlan. Megállapodás szerint a potenciált sokszor a végtelenben vesszük zérusnak: $U(\infty) = 0$. Ekkor:

$$U(P) = \int_P^\infty \vec{E} d\vec{r}$$

Vagyis egy tetszőleges pont potenciálja megmutatja, hogy mennyi munkát végez az elektrosztatikus mező, amíg az egységnyi pozitív töltést a tér P pontjából a végtelenbe szállítja.

A pozitív töltésekre az alacsonyabb potenciálú hely, a negatív töltésekre a magasabb potenciálú hely felé irányuló elektromos erő hat. Előbbi annak felel meg, hogy egy tömegpontra a Föld gravitációs terében lefelé irányuló erő hat, ha ennek hatására elmozdul a tömegpont, potenciális energiája csökken. Negatív tömeg nincs, a taszításnak nincs gravitációs megfelelője.

Az elektromos esetben is érvényes az a múlt félévben tanult összefüggés, hogy minél nagyobb a potenciális energia egységnyi hosszra eső változása, annál nagyobb erő hat, pontosabban: $\vec{F} = -\mathrm{grad} E_p$, tehát az erő abban az irányban hat, amerre a leggyorsabban csökken a potenciális energia. Most ezt a térerősség és a potenciál közötti összefüggésre is felírhatjuk:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad} U$$

Számolási Feladat

Feladat: Elektrosztatikus potenciál $U = u_0(3x+4z)$ módon függ a helykoordinátáktól, $u_0 = 2$ V/m. Mekkora és milyen irányú az elektromos térerősség az origóban és a (2, 1, 0) pontban. Milyen alakúak az ekvipotenciális felületek?

Megoldás: A fenti képletet használva, az u_0 konstanst a deriválásból kiemelve

$$\vec{E} = -u_0 \mathrm{grad}(3x + 4z) = -u_0 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = -6\vec{i} - 8\vec{k}$$

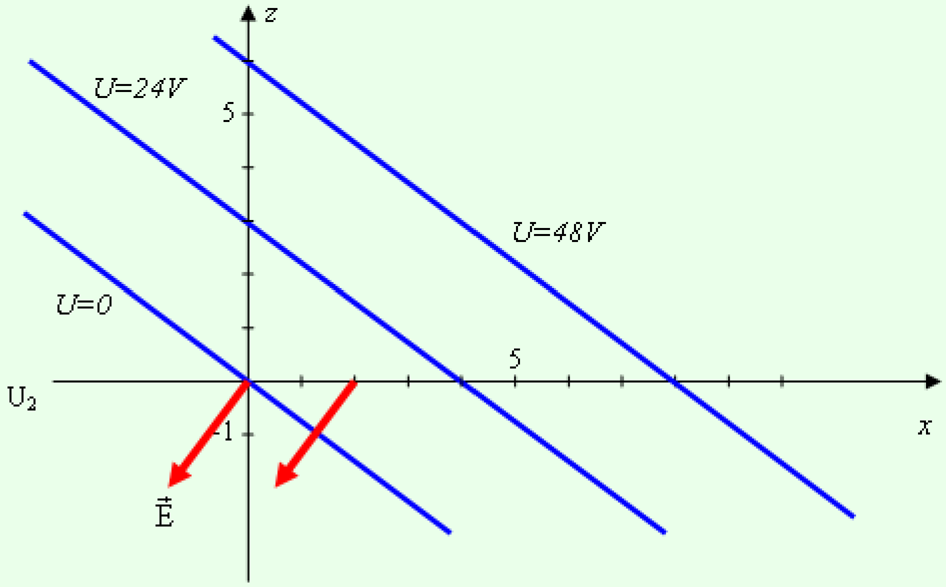
Azt kaptuk, hogy a térerősség független a helytől, tehát az origóban és a (2, 1, 0) pontban is ugyanaz. Az ekvipotenciális felületeket úgy kapjuk, hogy a potenciál-függvényt egy konstanssal tesszük egyenlővé:

$$u_o(3x+4z)=C$$

Ebből a z-t kifejezve:

$$z = \frac{C}{4u_o} - \frac{3}{4}x$$

Ez lényegében ax+b alakú, tehát egy C-től függő egyenes egyenlete. Ábrázoljuk az xz koordináta rendszerben (az y változó most érdektelen).



Az ábrán kék vonalak jelzik az ekvipotenciális felületeket. Az origón átmenő vonalat pl. úgy kapjuk, hogy a C helyébe nullát írunk. Ellenőrzésként a többi vonalnál írjuk be a tengelymetszetek koordinátáit a fenti egyenletbe, hogy kijön-e feszültségnek az az érték, ami az ábrán szerepel. A vastag piros nyíl a térerősséget ábrázolja (nem méretarányosan). Látható, hogy merőleges az ekvipotenciális felületre.

Mivel az elektrosztatikus mező konzervatív, benne bármely zárt görbén végzett munka nulla, azaz bármely zárt vonal mentén a feszültségesések összege zérus.

$$\oint_g \vec{E} \cdot d\vec{r} = U_1 - U_1 = 0$$

Az elektrosztatikus mező I. alaptörvénye tehát: $\oint_g \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$, vagyis ha egy zárt görbén végigmegy a próbatöltés, a mező összesen nulla munkát végez.

Ennek a törvénynek a differenciális (lokális) alakja: $\mathrm{rot}\vec{\mathrm{E}} = 0$. Hangsúlyozzuk, hogy ez a törvény általánosan csak a sztatikus esetben érvényes, ahol az elektromos mezőt álló töltések hozzák létre. (Ha a töltések mozognak, az érvényességnek további feltételei vannak. Leegyszerűsítve azt mondhatjuk, hogy akkor érvényes, ha a mozgó töltések nem hoznak létre változó mágneses mezőt, tehát pl. az egyenáram esetében.).

Az elektrosztatikus mező I. alaptörvényéből kapjuk a Kirchhoff-féle huroktörvényt: bármely zárt görbén végighaladva a feszültségesések előjeles összege nulla:

$$\sum \mathrm{U} = 0$$

Ennek különösen az áramköröknél lesz nagy jelentősége.

PÉLDA

PÉLDA: PONTTÖLTÉS ELEKTROMOS MEZŐJE ÉS POTENCIÁLJA

Felhasználjuk, hogy $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$ és $\vec{F} = k\dfrac{Qq}{r^2}\vec{e}_r$

Ezekből a *Q* ponttöltés okozta elektromos térerősség nagysága:

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

A ponttöltés potenciálja attól *r* távolságra:

$$U(r) = \int_r^{\infty} \vec{E}d\vec{r} = kQ\int_r^{\infty} \frac{1}{r^2}dr = kQ\left[\frac{-1}{r}\right]_r^{\infty} = \frac{kQ}{r}$$

ANIMÁCIÓ

3. Kapacitás, kondenzátorok

A kapacitás fogalma

Ha egy vezetőben elektromos tér van jelen, az a szabad töltéshordozókat rendezett mozgásra készteti, elektromos áram jön létre. Sztatikai állapot akkor állhat be, ha a vezetőben nincs elektromos mező és a térerősség nulla, egyébként a szabad elektronok rendezetten mozognának. Tehát a vezetőben sztatikus állapotban $\vec{E}=0$. Ezt azt is jelenti, hogy sztatikus esetben a vezető bármely két pontja között a potenciálkülönbség nulla, az egész vezető ugyanazon a potenciálon van, idegen szóval ekvipotenciális tartomány. Kérdés, hogyan függ egy magányos vezető potenciálja a rá felhordott töltéstől. A szuperpozíció elve miatt, ha a vezető töltését megkétszerezzük, akkor a tér minden pontjában az $\vec{E}$ elektromos térerősség is a kétszeresére nő. Ennek megfelelően a vezető potenciálja is a duplájára nő. Tehát a vezető **potenciálja** egyenesen arányos a vezetőre vitt töltéssel, így a hányadosuk állandó. Ezt a hányadost C-vel jelöljük és a vezető **kapacitásának** nevezzük. Definíció:

$$\boxed{C=\frac{Q}{U}}$$

A kapacitás mértékegysége a farad (F): 1F=1C/V.

Számoljuk ki egy magányos *R* sugarú vezető gömb kapacitását (a végtelen távoli pontokat választva nulla potenciálúnak)! Felhasználjuk azt a később bizonyítandó állítást, hogy egy töltött gömb potenciálja a gömb felületén és a gömbön kívül ugyanannyi, mintha a töltés a gömb középpontjában lenne: $U(R)=k\frac{Q}{R}$, így a kapacitása:

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{Q}{k\frac{Q}{R}}=\frac{R}{k}=4\pi\varepsilon_0 R$$

Ha felhasználjuk a Coulomb állandó értékét, akkor beláthatjuk, hogy a hétköznapi méretű testek vákuumbeli kapacitása igen kicsi: A kapacitás megnövelésének egyik lehetséges módja az, hogy a feltöltött vezető közelébe egy másik földelt vezetőt helyezünk. Ilyenkor a potenciál lecsökken, a kapacitás pedig nő. A **kondenzátor** két vezető test (az armatúrák vagy fegyverzetek) amelyek dielektrikummal vannak elszigetelve egymástól,a két fegyverzet töltése ellentetten egyenlő. Az elrendezés kapacitását a pozitív fegyverzet töltésének és a két fegyverzet közötti potenciálkülönbségnek a hányadosaként értelmezzük: C=Q/U.

Kondenzátorok kapcsolása, eredő kapacitás

Soros kapcsolás

Tegyük fel, hogy **sorosan** kapcsolunk két kondenzátort (kapacitásuk C_1 és C_2) pl. egy U feszültségű telepre. Ekkor a két kondenzátor U_1 és U_2 feszültségre töltődik fel, ahol a huroktörvény miatt $U_1+U_2=U$. A kondenzátorok töltése $Q_1=C_1U_1$ és $Q_2=C_2U_2$ lesz. Az eredő kapacitás azt jelenti, hogy a két kondenzátort gondolatban kicseréljük eggyel, úgy, hogy a kondenzátorokon kívül semmi sem változik, azaz a töltés és a feszültség is állandó. Az eredő kondenzátornak nyilván U lesz a feszültsége. A feltöltődés során a telep negatív sarkából elektronok gyűlnek a C_1 megfelelő lemezére Q_1 össztöltéssel. Ezek a C_1 másik lemezéről eltaszítanak ugyanannyi elektront, amelyek C_2 lemezen gyűlnek össze és szintén eltaszítanak ugyanennyi elektront a másik fegyverzetről, amely visszamegy az áramforrásba, annak pozitív sarkába. Ebből két következtetést vonhatunk le: egyrészt $Q_1=Q_2$, másrészt a telep sarkai között csak Q_1 töltés áramlott (a kondenzátorok közötti töltésmozgás kívülről nézve lényegtelen), tehát $Q_e=Q_1$. A $U_1+U_2=U$ összefüggésbe behelyettesítve a feszültségeket $\frac{Q_e}{C_e}=\frac{Q_1}{C_1}+\frac{Q_2}{C_2}$, a töltésekkel egyszerűsítve kapjuk az eredő kapacitásra:

$$\frac{1}{C_e}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

A töltések egyenlőségéből kapjuk, hogy $C_1U_1=C_2U_2$, azaz $\frac{C_1}{C_2}=\frac{U_2}{U_1}$, magyarul hogy a feszültség fordított arányban oszlik meg a kapacitások között.

Párhuzamos kapcsolás

Ebben az esetben könnyen látható, hogy a feszültségek megegyeznek: $U_1=U_2=U$ (huroktörvény), másrészt a telepből kiáramló elektronok egyik része az egyik, másik része a másik kondenzátorra megy, azaz $Q_e= Q_1+Q_2$. Ez utóbbiba beírva a töltések $Q_e= C_eU$, $Q_1= C_1U_1$ és $Q_2= C_2U_2$ kifejezéseit, kapjuk, hogy $C_eU=C_1U_1+C_2U_2$, a feszültségekkel egyszerűsítve adódik az eredő kapacitás:

$$C_e = C_1 + C_2 \,.$$

A feszültségek egyenlőségéből látszik, hogy $\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$, átrendezve $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_1}{C_2}$, tehát a töltés a kapacitással arányosan oszlik meg.

4. Elektromos tér az anyagban, az elektromos indukcióvektor

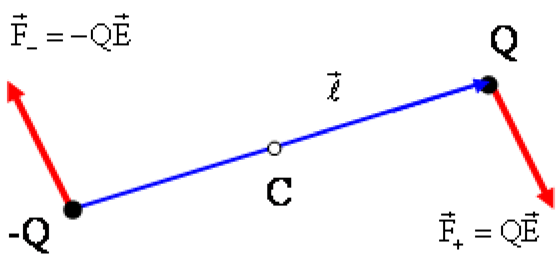
Elektromos dipólus

Az **elektromos dipólus** egy pozitív *Q* ponttöltésből és egy ugyanolyan nagyságú negatív ponttöltésből (-*Q*) áll, melyek távolsága ℓ. Ha ℓ kicsiny a feladatban előforduló egyéb távolságokhoz képest, akkor pontszerű dipólusról beszélünk. A dipólusnyomaték, vagy **dipólusmomentum** definíciója:

$$\vec{p} = Q\vec{\ell} \,,$$

ahol $\vec{\ell}$ az a negatív töltéstől a pozitív felé mutat. Gyakran töltések bonyolultabb rendszere, (pl. molekulák) is dipólussal helyettesíthető.

Határozzuk meg a pontszerű dipólusra ható eredő erőt és forgatónyomatékot homogén külső elektromos mezőben, vagyis ha az **elektromos térerősség** minden pontban ugyanaz!



Dipólusra ható forgatónyomaték külső elektromos mezőben

A negatív és a pozitív töltésre ható erők: $\vec{F}_- = -Q\vec{E}$ és $\vec{F}_+ = Q\vec{E}$, tehát homogén térben a dipólusra ható eredő erő nulla. A C pontra a **forgatónyomaték**:

$$\vec{M}_C = -\frac{\vec{\ell}}{2} \times \left(-Q\vec{E}\right) + \frac{\vec{\ell}}{2} \times Q\vec{E} = Q\vec{\ell} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E} \,,$$

A forgatónyomaték vektora (vagyis szabad dipólus esetén a forgástengely) tehát merőleges mind a dipólus tengelyére, mind a térerősségre. A konkrét példában az ábra síkjába befelé mutat, azaz a dipólus az óramutató járásával megegyező irányban fordul el. Ez a forgatónyomaték akkor szűnik meg, ha $\vec{p} \parallel \vec{E}$ vagyis a dipólus befordult a tér irányába, vagy pedig azzal pont ellentétesen áll. Ha $\vec{p}$ és $\vec{E}$ egyirányú, akkor $\vec{M}_C = 0$, és az egyensúlyi helyzet stabil, vagyis kitérítve a dipólust ebből a helyzetből a létrejövő nyomaték igyekszik visszaforgatni abba. Ha $\vec{p}$ és $\vec{E}$ pont ellentétes irányú, akkor bár a nyomaték nulla, de az egyensúlyi helyzet instabil. Ilyen esetben, ha a dipólust kitérítjük, akkor a létrejövő nyomaték a stabil egyensúlyi helyzet felé próbálja forgatni.

A forgatónyomatékra kapott összefüggés kis közelítéssel inhomogén térben is érvényes. Azonban, ha a tér nem homogén, a dipólusra nem csak forgatónyomaték, hanem zérustól különböző eredő erő is hat. Legyen a negatív töltés helyén a térerősség $\vec{E}$, a pozitív töltés helyén $\vec{E}+\Delta\vec{E}$. Ekkor az eredő erő $\vec{F}_e = -Q\vec{E}+Q(\vec{E}+\Delta\vec{E}) = Q\Delta\vec{E}$, vagyis $\vec{F}_e$ az inhomogenitás mértékétől függ, a tér változási gyorsaságával (pontosabban a gradiensével) egyenesen arányos.

Az elektromos polarizáció jelensége

Szokás bevezetni a tömegközéppont analógiájára a töltés-középpontot.

$$\vec{r}_{tkp} = \frac{\sum Q_i \vec{r}_i}{\sum Q_i}$$

Pl. egy molekulán belül külön értelmezhetjük a pozitív és negatív töltések töltésközéppontját. Azokat a molekulákat, amikben a pozitív és negatív töltések töltésközéppontja egybeesik, apoláris molekuláknak nevezzük, ilyenek például a H_2, O_2 molekulák. Ha a töltésközéppontok nem esnek egybe, akkor poláris molekulákról beszélhetünk: $HCl, CO_2, H_2O\ldots$, ezeket kicsiny dipólusokként modellezhetjük.

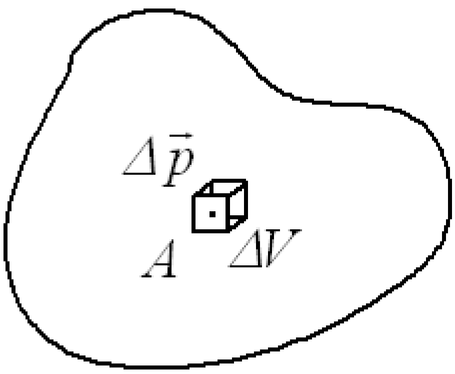
Az alkalmazott elektromos mező hatására a szigetelő anyag polarizálódik. Indukált polarizáció esetén az alkalmazott elektromos mező, az egybeeső töltésközéppontokat széthúzza így a molekula dipólussá válik, illetve ha a molekulának már eleve volt valamekkora dipólnyomatéka, akkor az megnő. Az $\vec{E}$ elektromos térerősség a $\oplus$ töltést a tér irányában, míg a – töltést azzal ellentétesen mozdítja el. A jelenség tehát poláros és apoláros molekulák esetén egyaránt fellép. Ionrácsok esetében az elektromos mező az ellentétes töltésű ionokra ellentétes irányú erővel hat, ez is növeli a polarizációt.

A polarizáció másik típusa a rendeződési (vagy *orientációs*) polarizáció. Ez a jelenség csak poláros molekulájú anyagokban fordulhat elő. Az elektromos mező a dipólus molekulákat a saját irányába forgatja be, annál inkább minél erősebb a tér és minél alacsonyabb a hőmérséklet. Ez tehát erőteljesen hőmérsékletfüggő, szemben az indukált polarizációval.

Az elektromos polarizációvektor

Vákuumban az elektromos mező leírására egyetlen vektor, az $\vec{E}$ térerősség-vektor elegendő. Kémiai anyagban azonban egy további vektor bevezetése szükséges, amely az anyag polarizáltságának mértékét adja meg.

Tekintsünk egy szigetelőanyagot vagy dielektrikumot, egy tetszőleges pontja legyen *A*. Jelölje az *A* pont körüli kicsiny térfogatelemet ΔV, és legyen $\Delta\vec{p}$ a ΔV térfogatban foglalt molekulák dipólusnyomatékának eredője.



Az anyag elektromos polarizálódása

Ekkor az *A* pont körüli kicsiny térfogat átlagos polarizáltságát a **polarizációvektorral** jellemezhetjük:

$$\vec{P}(A) = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta V}.$$

A polarizációvektor mértékegysége a C/m^2. A tapasztalat szerint az anyagok nagy részére jó közelítéssel fennáll az alábbi lineáris anyagegyenlet:

$$\vec{P} = \kappa \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E},$$

vagyis minél erősebb az elektromos mező, annál erősebben polarizálódik az anyag. A κ dimenziótlan arányossági tényezőt **elektromos szuszceptibilitásnak** nevezzük. Ennek értéke vákuum esetén nulla, szigetelőanyagban pedig mindig pozitív: $\kappa > 0$. Ha a térerősség nagy, akkor a szigetelő vezetővé válhat, (ezt a térerősséget átütési szilárdságnak nevezzük,) ilyenkor a fenti egyenlet érvényessége megszűnik, az összefüggés tehát nem lehet minden körülmények között jó. Másrészt ismerünk olyan anizotrop kristályokat, melyekben a térerősség vektor nem párhuzamos a polarizációvektorral, a fenti egyenlet természetesen ekkor sem igaz.

Elektromos indukcióvektor

Célszerű bevezetni az **elektromos indukcióvektort** ($\vec{D}$) az **elektromos térerősség** vektor és a **polarizációvektor** segítségével. Ennek a lineáris kombinációnak a bevezetését az indokolja, hogy vele egyszerű alaptörvény írható fel. Definíció szerint:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

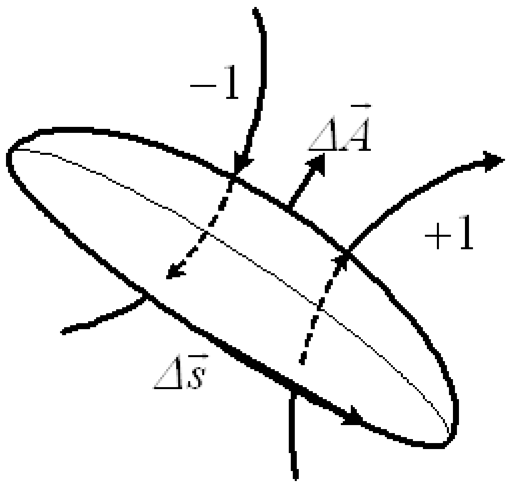
A mértékegysége nyilvánvalóan egyezik a polarizációvektoréval, tehát C/m^2. Ha felhasználjuk a fenti lineáris közelítést, akkor

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \kappa \cdot \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (1+\kappa) \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E} = \varepsilon \vec{E},$$

ahol $\varepsilon_r = 1 + \kappa$ a **relatív permittivitás**, amely megadja, hányszor nagyobb az illető szigetelő vagy dielektrikum permittivitása a vákuuménál, $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ pedig az **abszolút permittivitás**.

Az elektromos mező szemléltetésére az indukcióvonalakat használhatjuk. Ezek olyan irányított görbék, amelyeknek az érintő egységvektora egyirányú az érintési pontbeli elektromos indukcióval. Az **elektromos fluxus** (Ψ) mindig irányított felületre vonatkozik, és számértéke megadja a felületet átdöfő indukcióvonalak előjeles számát. Amennyiben az indukcióvonal a felületelem vektorral megegyező irányban döfi a felületet, akkor az +1 járulékot ad, ha ellenkező irányban, akkor –1 a járuléka.



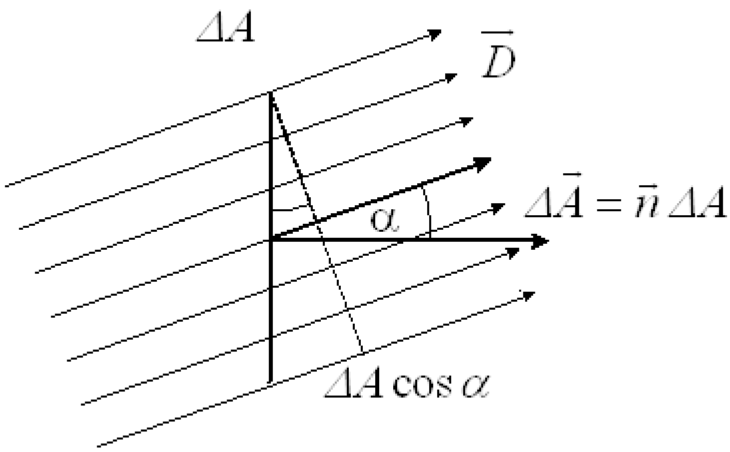
A peremgörbe és a felületi normális irányítása, a felületet döfő indukcióvonalak

Tekintsünk ΔA felületet, és számítsuk ki a felületre az elektromos indukció-fluxust. A felületvektor $\Delta\vec{A}$, zárjon be α szöget az indukcióvektorral. Ha ΔA elegendően kicsiny, akkor az indukció már homogénnek tekinthető, és az elemi kicsiny indukció-fluxus:

$$\Delta\Psi = D \cdot \Delta A \cdot \cos\alpha = \vec{D}\Delta\vec{A}$$

Egy tetszőleges *A* felületre pedig integrálással kaphatjuk meg a fluxust, a fenti értelmezésnek megfelelő matematikai képlet tehát:

$$\Psi = \int_A \vec{D} d\vec{A}.$$

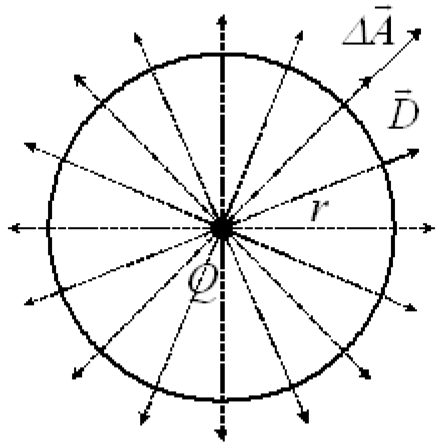


Indukció-fluxus a ΔA felületre

Felhasználva, hogy az indukció mértékegysége C/m^2, az indukció-fluxus mértékegysége C (ugyanaz a *coulomb*, mint a töltésé).

Az elektrosztatika második alaptörvénye

Vizsgáljuk meg azt a kérdést, hogy milyen kapcsolat van a mezőt keltő töltés és a kialakult mező indukcióvektora között. Ennek megválaszolására tekintsünk egy vákuumban elhelyezett ponttöltést, és számoljuk ki a fluxusát egy zárt felületre, amely legyen egy *r* sugarú koncentrikus gömb felszíne!



A Q ponttöltést körülvevő zárt felület koncentrikus gömb

Látható, hogy ha feltesszük, hogy az indukcióvonalak forrása csak a töltés lehet, (a vákuum miért is lenne forrás?), akkor akármilyen nagyra választjuk a gömb sugarát, a gömbfelületen ugyanazok a vonalak mennek át, tehát a fluxus nem függ a felület nagyságától, csak a töltéstől. Mivel kétszer nagyobb sugárhoz négyszer nagyobb felület tartozik, ahhoz, hogy Ψ ugyanakkora maradjon, az indukciónak, és így a térerősségnek kell negyedére csökkennie, ez pedig pont a Coulomb törvény lényege. Vezessük le most fordítva precízebben!

Mivel a ponttöltés által keltett térerősség ismert:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$$

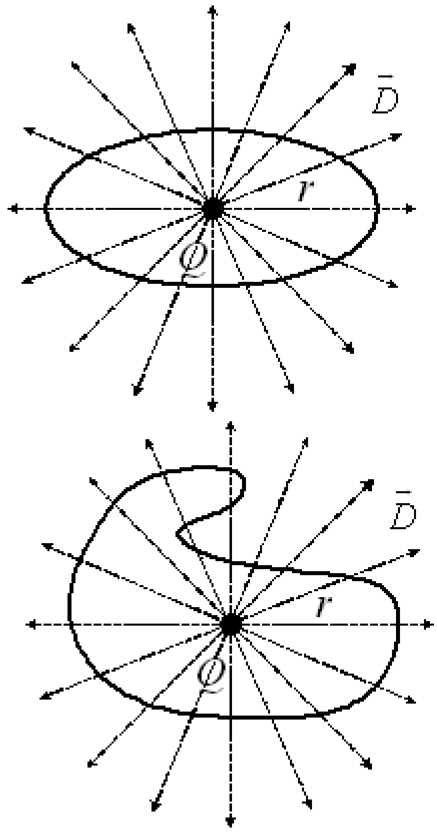
az elektromos indukciót egyszerűen kapjuk a térerősségből: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, ezzel

$$\vec{D} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r .$$

Így a zárt felületre számított fluxus egyenlő a felületen belüli töltéssel:

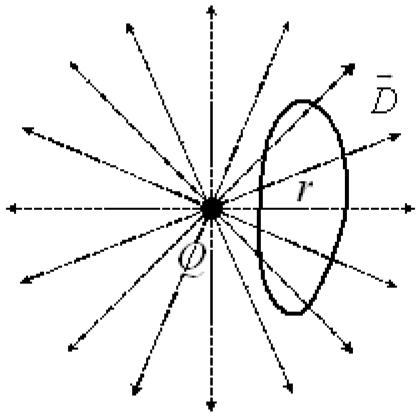
$$\overset{0}{\Psi} = \oint_A \vec{D} d\vec{A} = \oint_A \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} dA = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \oint_A dA = \frac{Q}{4r^2\pi} 4r^2\pi = Q$$

A számolást az a tény egyszerűsítette le, hogy az indukcióvektor nagysága mindenütt ugyanakkora, mivel csak a töltéstől mért *r* távolságtól függ, az pedig a gömbfelületen állandó. Az eredmény viszont akkor is változatlanul érvényes, ha a *Q* töltést körülölelő zárt felület nem egy koncentrikus gömb, hiszen bármely a *Q* töltést magába foglaló zárt felületre a fluxus ugyanennyi, mivel a *Q*-ból kiinduló összes indukcióvonal átdöfi a *Q*-t magába foglaló zárt felületet. Ezt mutatják a következő ábrák.



A Q ponttöltést körülvevő zárt felület

Ha a felület nem foglalja magába a *Q* töltést, akkor a fluxus nulla. Ahol az indukcióvonal bemegy ott –1 a járulék, ahol kijön ott +1.



Ha a zárt felület nem foglalja magába a Q töltést, akkor a fluxus nulla

Tapasztalat szerint tetszőleges töltéselrendezés estén és kémiai anyag jelenlétében is igaz, hogy zárt rögzített felületre az elektromos fluxus egyenlő a felületben foglalt összes töltéssel.

$$\oint_A \vec{D} d\vec{A} = Q$$

A fenti egyenlet az **elektrosztatika II. alaptörvénye**, gyakran **Gauss törvénynek** nevezik. Q a V térfogatban foglalt töltések algebrai összegét jelenti, A pedig a V térfogat burkoló felülete. Az elektromos indukcióvonalak forrásai a pozitív töltések, nyelői pedig a negatív töltések, más szóval az indukcióvonalak a pozitív töltésen erednek és a negatív töltésen végződnek.

A Gauss törvény differenciális (lokális) alakja: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$.

Fontos megemlíteni, hogy a $\vec{D}$ értéke nem függ attól, hogy vákuumban vagyunk vagy szigetelő közegben, mivel csak a valódi, azaz nem polarizációval létrejött töltés működik forrásként. A térerősség viszont módosul a Coulomb törvénnyel együtt:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{qQ}{r^2}$$

PÉLDA

PÉLDA: GÖMB ELEKTROMOS TERE

Ahogy a fentiekből látható, ponttöltés elektromos tere könnyen adódik a **Gauss-törvényből** is. Ehhez egyszerűen egy olyan R sugarú gömbfelülettel kell képzeletben körbevenni a ponttöltést, amely középpontjában a töltés ül, ekkor a szimmetria-tulajdonságokat kihasználva Gauss törvényében a felületi integrál kiszámítása szorzássá egyszerűsödik: $\varepsilon_0 E 4\pi R^2 = Q$.

Vegyük észre azonban, hogy itt sehol sem használtuk ki, hogy a ponttöltés pontszerű, még azt sem, hogy kicsi a mérete, csupán azt, hogy gömbszimmetrikus töltéseloszlás és hogy a választott képzeletbeli gömbfelületen belül van az összes töltés (tehát a töltések távolsága a középponttól nem nagyobb, mint R), a középpontok pedig egybeesnek. Tehát bármilyen gömbszimmetrikus töltéseloszlás erőtere kívülről úgy néz ki, mintha az összes töltés a középpontba lenne koncentrálva. Speciálisan igaz ez térfogatában egyenletesen töltött r sugarú gömbre, valamint a felületén egyenletesen töltött r sugarú gömbhéjra, ha $r \geq R$.

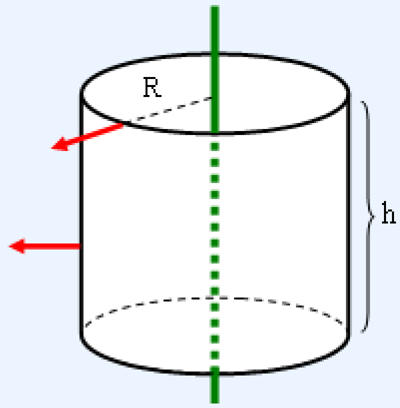
Továbbmenve, ha ez utóbbi gömbön kívül a térerősség mindenhol helyettesíthető a ponttöltés által keltett térrel, akkor, ha integráljuk ezt a térerősséget R-től a végtelenig, nem lesz különbség, vagyis a gömbön kívül a potenciál is megegyezik a két esetben. Végül megkaptuk a töltött gömb kapacitásának levezetésénél használt állítást: egy Q töltésű R sugarú fémgömb potenciálja (ez egy érték, mivel ekvipotenciális a fémdarab) megegyezik egy Q ponttöltés által keltett tér potenciáljával a töltésről R távolságban: $U = k\frac{Q}{R}$

PÉLDA

PÉLDA: HOSSZÚ TÖLTÖTT FONÁL ELEKTROMOS TERE

Adjuk meg a végtelen hosszúságú, egyenletes λ vonalmenti töltéssűrűségű egyenes fonál elektromos terének erősségét és potenciálját!

Vegyünk fel az egyszerűség kedvéért olyan koordináta-rendszert, ahol a töltött fonál a z tengellyel esik egybe. Ekkor szimmetria-okokból a térerősségnek nem lesz z komponense (ha lenne, az szimmetria-sértés lenne), hanem az x-y síkban sugárirányban kifelé (negatív töltés esetén befelé) mutat. Akkor használhatjuk könnyedén a **Gauss-tétel**t, ha olyan felületet találunk, amely mentén a (piros nyíllal jelölt) térerősség nagysága és a felülettel bezárt szöge állandó. Próbálkozzunk egy hengerpalásttal.



A henger alap- és fedőlapján a térerőség-vektor a felülettel párhuzamos, a felület normálisával 90^{o}-os szöget zár be, vagyis ott a felületi integrál eltűnik. Integráljunk a palástra:

$$\oint_F \vec{D}d\vec{A} = \int_{pal.} \varepsilon E dA = \frac{1}{4\pi k} E \int_{pal.} dA = \frac{1}{4\pi k} E 2R\pi h = Q = \lambda h$$

amiből: $E = \dfrac{2k\lambda}{R}$, tehát a térerősség a távolság reciprokával csökken. Mivel sehol sem használtuk ki, hogy a fonál vékony, az eredmény érvényes tetszőleges hengerszimmetrikus tölteseloszlás, pl. térfogatában egyenletesen töltött R sugarú henger, valamint a felületén egyenletesen töltött R sugarú hengerpalást terére tőle r távolságban, ha $r \geq R$ A potenciál számításánál vékony fonál esetén a nulla szint megválasztása jelent problémát. Ha a fonálnál lenne a nulla szint, akkor ott végtelen lenne a térerősség. Ha a végtelenben választanánk a nullát, akkor pedig a potenciál lenne végtelen, mint ahogy azt mindjárt látni fogjuk. Tegyük fel, hogy valamilyen tetszőlegesen választott, majd rögzített R_0 távolságra vesszük a nulla szintet és integráljunk tetszőleges R-től R_0-ig:

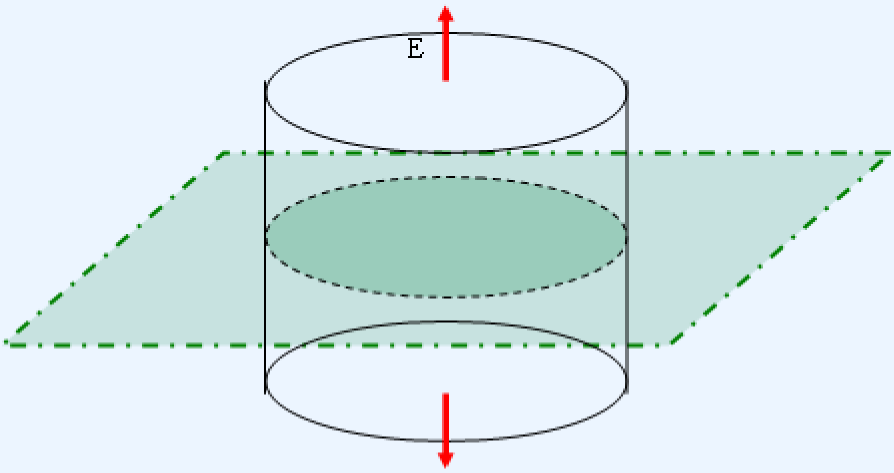
$$U(R) = \int_R^{R_0} \vec{E}d\vec{r} = 2k\lambda \int_R^{R_0} \frac{1}{r} dr = 2k\lambda \left[\ln r\right]_R^{R_0} = 2k\lambda \ln\left(\frac{R_0}{R}\right)$$

PÉLDA

PÉLDA: EGYENLETESEN TÖLTÖTT SÍKLEMEZ ELEKTROMOS TERE

Határozzuk meg az η felületi töltéssűrűségű végtelen, az *x-y* síkban elhelyezkedő sík lemez által keltett elektromos térerősséget és potenciált!

Az előző feladathoz hasonlóan járunk el. Most egy olyan zárt felületet veszünk fel, amelynek alapja tetszőleges alakú (legyen pl. kör, így henger lesz a felület), de a síkkal párhuzamos, az alap és a fedőlap ugyanolyan távol van a síktól annak két oldalán, a hengerpalást pedig merőleges a síkra. A térerősségnek szimmetria-okokból nem lehet x vagy y komponense, hanem a z (vagy -z) irányba mutat.



Amikor a térerősség felületi integrálját számoljuk a palástra, a felület normálisa merőleges $\vec{E}$-re, tehát a palást nem ad járulékot az integrálba. A henger vízszintes lapjain pedig $\vec{E}$ konstans, tehát kiemelhető az integrálás elé:

$$\oint \vec{D}d\vec{A} = \varepsilon\left(\int_{alap} EdA + \int_{fedő} EdA\right) = \varepsilon E\left(\int_{alap} dA + \int_{fedő} dA\right) = 2\varepsilon EA = Q = \eta A,$$

vagyis $E = \frac{\eta}{2\varepsilon}$. Azt az érdekes eredményt kaptuk, hogy a térerősség nem függ a lemeztől mért távolságtól. Ez persze csak addig igaz, ameddig jó közelítés az, hogy végtelen a síklap, azaz sokkal közelebb van a vizsgált pont a síklaphoz, mint annak átmérője.

A potenciálhoz a kapott konstans térerősség-függvényt kell integrálni z irányú görbe mentén, ami egyszerű szorzást jelent. Célszerű a nulla szintet a töltött síknak választani. Világos, hogy akár z, akár -z irányban haladunk, ugyanakkora munkát kell végezni, tehát z-nak csak az abszolút értéke számít. Mivel pozitív a próbatöltés, a pozitív lemez taszítja őt, vagyis a lemez magas potenciálon van a tér többi pontjához képest. Ezen megfontolások alapján a potenciál:

$$U = -\frac{\eta}{2\varepsilon_0}\cdot|z|$$

Példa

Példa: Ponttöltés elektromos terének tulajdonságai

Vizsgáljuk meg a Q ponttöltés elektromos terének tulajdonságait. Legyen az egyszerűség kedvéért a töltés az origóban. Ekkor a térerősség iránya egy adott (x,y,z) pontban megegyezik az origóból a pontba húzott helyvektor irányával. A térerősség komponensei:

$E_x = \frac{kQ}{r^3}x$, $E_y = \frac{kQ}{r^3}y$, $E_z = \frac{kQ}{r^3}z$, ahol a nevező függ mindhárom koordinátától: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

A Pithagorasz tételt alkalmazva visszakapjuk a korábban levezetett térerősség-vektor nagyságát: $E = \frac{kQ}{r^2}$.

Számoljuk ki először a *divergenciát*, ehhez a megfelelő parciális deriváltak kellenek.

$$\partial_x E_x = kQ\left(\frac{-\frac{3}{2}\cdot 2x\cdot x}{r^5}+\frac{1}{r^3}\right),$$

ha $r \neq 0$. A $\partial_y E_y$ és a $\partial_z E_z$ deriváltakat is hasonlóan kapjuk (csak az x-eket kell y-ra és z-re kicserélni). A divergencia a három derivált összege:

$$div\vec{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \frac{kQ}{r^3}\left(3-3\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\right)=0$$

Azt a nem meglepő eredményt kaptuk, hogy ponttöltés elektromos terének divergenciája a töltésen kívüli pontokban nulla, vagyis az elektromos térnek a töltéseken kívül nincsenek forrásai. Ez egyébként következik a Gauss-tételből is.

A *rotáció* számítása:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ E_x & E_y & E_z\end{pmatrix} = (\partial_y E_z - \partial_z E_y)\vec{i} + (\partial_z E_x - \partial_x E_z)\vec{j} + (\partial_x E_y - \partial_y E_x)\vec{k}$$

Először a vegyes parciálisokat kell kiszámolni. Mivel a koordináták egymástól függetlenek, csak a nevezőket kell deriválni:

$$\partial_y E_z = kQ\frac{-\frac{3}{2}\cdot 2y\cdot z}{r^5} = -3kQ\frac{yz}{r^5} \quad \text{és} \quad \partial_z E_y = kQ\frac{-\frac{3}{2}\cdot 2z\cdot y}{r^5} = -3kQ\frac{yz}{r^5}.$$

Látható, hogy az egy zárójelben lévő vegyes parciálisok megegyeznek, egymásból kivonva őket, nullát kapunk, tehát ponttöltés tere (és ezzel bármilyen sztatikus töltés-elrendezés tere) örvénymentes.

Abban a pontban, ahol a ponttöltés elhelyezkedik, a töltéssűrűség végtelen, a térerősségnek szingularitása van, a deriváltak nem értelmezhetőek.

Határfeltételek (peremfeltételek) az elektrosztatikában

Tekintsük két különböző közeg határfelületét. Az elektrosztatika első alaptörvényének felhasználásával $\oint_g \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$, be lehet bizonyítani, hogy az elektromos térerősség érintő irányú összetevője a határfelületen folytonosan megy át:

$$E_{t_2} = E_{t_1}.$$

E_{t2} a térerősség tangenciális komponense a határon, de még a 2-es közegben, E_{t1} pedig a térerősség tangenciális komponense a határon, de az 1-es közegben.

Az elektrosztatika második alaptörvényének segítségével, $\oint_A \vec{D}d\vec{A} = Q$, az **elektromos indukcióvektor** normális komponensére lehet feltételt levezetni. Ilyenkor

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma.$$

Az elektromos indukcióvektor normális komponense két közeg határán ugrást szenved, és az ugrás mértéke éppen a σ felületi töltéssűrűség (korábban η-val jelöltük), melynek definíciója:

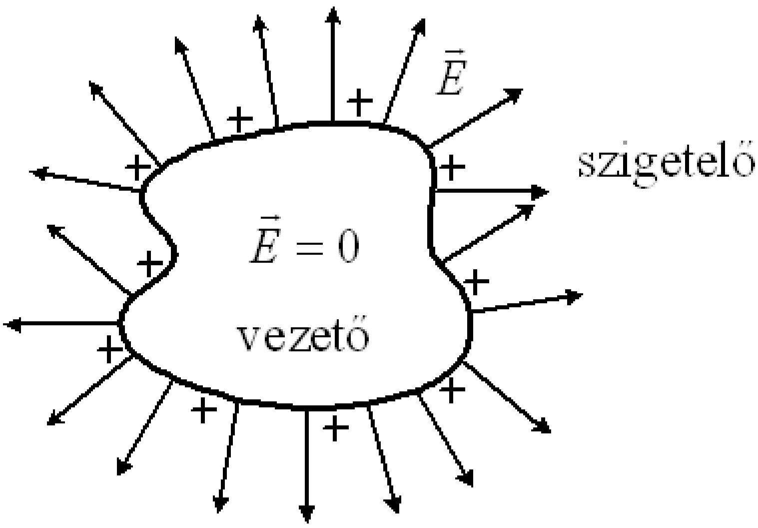
$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A}.$$

D_{n2} az indukcióvektor normális komponense a határon, de a 2-es közegben, D_{n1} pedig az indukcióvektor normális komponense a határon, de az 1-es közegben

Vezetők az elektrosztatikus mezőben

Mint már említettük, a vezetőben sztatikus állapotban $\vec{E} = 0$, a vezető ekvipotenciális tartomány. Ez az állítás akkor is igaz, ha a vezető belsejében üregek vannak., feltéve, hogy az üreg belsejében nincsenek elszigetelt töltések. Azt a tényt, hogy zárt fémburkolattal (vagy sűrű szövésű fémhálóval – úgynevezett Faraday-kalitkával) körülvett térrészbe az elektromos erőtér nem hatolhat be, felhasználják arra, hogy érzékeny elektromos berendezéseket a külső, zavaró elektromos hatásoktól, pl. villámcsapástól megvédjenek. Az eljárás neve elektrosztatikai árnyékolás.

Ha $\vec{E} = 0$, akkor térerősség tangenciális komponense is nulla. Mivel $\vec{E}$ tangenciális összetevője nem ugrik két közeg határfelületén, a vezetőt határoló szigetelőanyagban a felület mentén az elektromos térerősségnek tangenciális összetevője nincs, vagyis a vezető körül a szigetelőben a térerősség mindenütt merőleges a vezető felületére.



Elektromos térerősség a vezetőben, és a környező szigetelőben, sztatikus állapotban

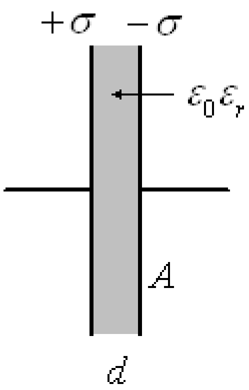
Tekintve, hogy a vezetőben a térerősség nulla $\vec{E} = 0$, így az elektromos indukció is nulla $\vec{D} = 0$. Ebből az is következik, hogy a vezető belsejében, sztatikus esetben térfogati többlettöltés nem lehet $\rho = 0$. Ez az állítás az elektrosztatika második alaptörvényéből következik. A vezetőre vitt töltés a vezető külső felületére húzódik. A határfeltételi egyenlet szerint $D_{n2} - D_{n1} = \sigma$, de a vezetőben az indukció nulla $D_{n1} = 0$, így

$$D_{n2} = \sigma.$$

Ez a kifejezés azt jelenti, hogy a vezető mentén, de már a szigetelőben az elektromos indukció értéke éppen a vezető felületi töltéssűrűségével egyezik meg.

Síkkondenzátor kapacitása

Jelölje *d* a síkkondenzátor fegyverzetei között lévő távolságot! Legyen d jóval kisebb, mint a lemezek bármely lineáris mérete!



A síkkondenzátor

A két fegyverzet között az elektromos indukció $D = \sigma$, ebből $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$. A potenciál-különbség a fegyverzetek között $U = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} d$, ebből:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma A}{\dfrac{\sigma d}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} .$$

Tehát a síkkondenzátor kapacitása:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$$

5. Az elektrosztatikus mező energiája

Tekintsünk egy kondenzátort, melynek kapacitása *C*. Töltsük fel 0-ról *Q*-ra. Egy közbülső állapotban jelölje a pillanatnyi állapot töltését *q* és a fegyverzetek közötti feszültséget *u*. Egy kicsiny Δq töltést szállítsunk át az egyik lemezről a másikra. Mivel az egységnyi töltésen végzett munka a feszültség, így a végzett munka $\Delta W = u \Delta q$. Mivel $C = \dfrac{q}{u}$, így a végzett munka miközben a kicsiny Δq töltést átszállítjuk: $\Delta W = \dfrac{q}{C} \Delta q$. Az összes végzett munka a kondenzátor teljes feltöltése során:

$$W = \frac{1}{C} \int_0^Q q\,dq = \frac{Q^2}{2C}$$

így *a kondenzátor energiája*:

$$W = \frac{Q^2}{2C}$$

A kapacitás definíciójának felhasználásával ez átírható más alakokba is: $W = \dfrac{1}{2} QU = \dfrac{1}{2} CU^2$. Mivel úgy tekintjük, hogy ezt az energiát a lemezek közti elektromos tér hordozza, felmerül a kérdés, hogy mennyi energia van a mező egységnyi térfogatában. Tekintsünk egy síkkondenzátort, a kondenzátor belsejében a szélektől eltekintve a mező homogénnek tekinthető.

,

$$W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}\sigma A \cdot Ed = \frac{1}{2}DE \cdot Ad = \frac{1}{2}DE \cdot V$$

Ahol felhasználtuk a következő, korábban említett összefüggéseket: $\sigma = \frac{Q}{A}$, $D = \sigma$, $V = Ad$, és $E = \frac{U}{d}$. Az *elektromos mező energiasűrűsége* megmutatja, mennyi energia van egységnyi térfogatban: $w = \frac{W}{V}$, a mértékegység nyilván J/m^3. A fenti levezetés szerint az elektromos mező energiasűrűsége:

$$w = \frac{1}{2}\vec{D}\vec{E}$$

Ez a kifejezés nem csak sztatikus esetben igaz. Ha a tér egy tetszőleges pontjában az elektromos térerősség $\vec{E}$ és az indukcióvektor $\vec{D}$, akkor a pont körül felvett kicsiny ΔV térfogatban $\Delta W = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E}\Delta V$ elektromos energia található. Egy véges *V* térfogatban pedig

$$W = \int_V w dV = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\vec{E} dV.$$

Megjegyzés: a síkkondenzátor energiáját egy másik, (szintén tanulságos) módon is ki lehet számolni. Ha az egyik (pl. baloldali) fegyverzet által a másikra (pl. a jobboldalira) kifejtett erőt az F=QE definíció és az $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ képletből automatikusan kiszámoljuk, a valóságosnál kétszer nagyobb erőt kapunk (mivel a térerősséget feleészben a baloldali, feleészben pedig a jobboldali lemez kelti, utóbbi pedig nem fejthet ki erőt önmagára). Így azt kapjuk, hogy

$$F = \frac{QE}{2} = \frac{\sigma Q}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A},$$

vagyis az erő független a lemezek *d* távolságától (persze csak ameddig a közelítéseink – pl. hogy a térerősség homogén – érvényesek). Ha *d=0*, akkor a kondenzátornak nincs (elektrosztatikus) energiája. Kezdjük el most távolítani a lemezeket, miközben a töltés maradjon állandó. Ha a lemezek közötti távolság éppen *d*, a távolító erő $W = Fd = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} = \frac{Q^2}{2C}$ munkát végzett, ennyi energia halmozódott fel a kondenzátorban.

6. Ellenőrző kérdések

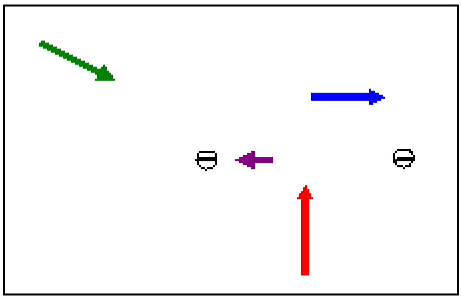
FELADATOK - ELEKTROSZTATIKA

Többször megoldható feladat, **elvégzése kötelező**.
A feladat végső eredményének a mindenkori **legutolsó megoldás** számít.

Oldja meg a következő feladatokat!

Jelölje meg a helyes megoldást!

1. **Az ábrán két egyforma nagyságú, negatív előjelű, rögzített ponttöltés látható. Melyik nyíl mutatja biztosan rosszul az adott pontban az elektromos térerősség irányát?**



- piros
- zöld
- kék
- mindegyik jól mutatja
- lila

2. **Hidrogén-fluorid molekulákból álló anyagban mikor a legnagyobb a $\vec{P}$ polarizáció-vektor?**

- ha az elektromos térerősség nagy és a hőmérséklet nagy
- ha az elektromos térerősség nagy és a hőmérséklet kicsi
- a $\vec{P}$ független a térerősségtől és a hőmérséklettől
- ha az elektromos térerősség kicsi és a hőmérséklet kicsi
- ha az elektromos térerősség kicsi és a hőmérséklet nagy

3. **Egy anyagnak akkor nagy az elektromos szuszceptibilitása, ha...**

- nagyrendszámú elem
- nemesgáz
- jól vezeti az elektromos áramot
- kondenzátor lemezei közé téve annak kapacitása nagymértékben növekszik
- nem mágneses fém