Kovács Endre, Paripás Béla,

Fizika II.

6

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a
TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

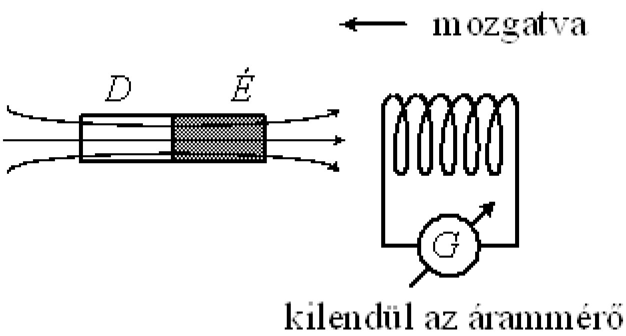
VI. AZ ELEKTROMÁGNESES INDUKCIÓ

1. MOZGÁSI INDUKCIÓ

Azt már tudjuk, hogy ha egy mágneses mezőben lévő vezetőben áram folyik, akkor a vezetőre erő hat (Ampère-erő) és az mozgásba lendül. Kérdés, hogy ha mágneses mezőben vezetőt mozgatunk, akkor indukálódik-e áram, ill. általában hogyan tudunk mágneses úton áramot előállítani.

Ha egy vezetőt mágneses mezőben mozgatunk, akkor a vele együttmozgó töltéshordozókra a Lorentz-erő hat.

Ezt az erőt korábban idegen erőnek neveztük: $\vec{F}_* = q\vec{v}\times\vec{B}$. Az idegen térerősség: $\vec{E}_* = \frac{\vec{F}_*}{q} = \vec{v}\times\vec{B}$.

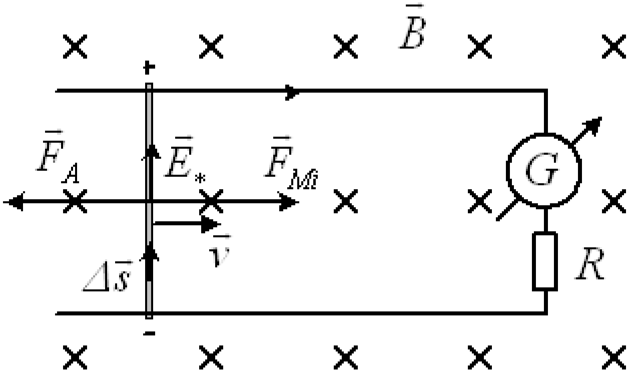


Mozgási indukció jelensége

A mozgó vezető vonal mentén elektromotoros erő indukálódik (keletkezik), vagyis ekkor a vezető áramforrásként működik. A mozgási indukciót leíró Neumann-törvény általános alakja:

$$\mathcal{E}_{AB} = \int_A^B \vec{E}_i d\vec{s} = \int_A^B \left(\vec{v}\times\vec{B}\right) d\vec{s}$$

Ha a vezetőből készített vonal zárt, akkor az indukált elektromotoros erő hatására indukált áram jön létre. Tekintsük egyenes vezetőt, és $\vec{v}, \vec{B}, \Delta\vec{s}$ legyenek egymásra merőlegesek.



Az indukált elektromotoros erő a zárt áramkörben indukált áramot eredményez

A fenti, áramforrásként viselkedő mozgó fémrudat *lineáris generátornak* is nevezik. Figyelembe véve a nagyon speciális geometriát (a rúd sebessége merőleges a mágneses indukcióvektorra és a rúdra), az elektromotoros erő:

$$\mathcal{E}_{AB} = \mathcal{E} = \int_A^B \vec{E}_i d\vec{s} = \int_A^B \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) d\vec{s} = v\, B\, \ell$$

A körben folyó áram erőssége pedig az ellenállások ismeretében meghatározható. Ha az egész kör ellenállása R, akkor I=ε/R. Azonban az indukált áram miatt erre a rúdra is hat az Ampère-erő, a mozgás irányával ellentétesen [1], így azt egy $\vec{F}_h$ (húzó)erővel kell kompenzálnunk. Ennek az erőnek a teljesítménye fedezi a fogyasztón mért teljesítményt. A generátorok mechanikai teljesítmény árán szolgáltatnak elektromos teljesítményt.

A fenti elrendezésnél ℓ a mozgó rúd konstans hossza volt, legyen a zárt hurok másik (az ábrán vízszintes) oldalának hossza h. Ekkor a hurok területe $A = h\ell$, a példában ez annál gyorsabban csökken, minél gyorsabban mozog a rúd jobbra. A rúd sebessége v=-dh/dt, de mivel ℓ konstans, $dA/dt = d(h\ell)/dt = -\ell v$. A **mágneses indukciófluxus** változási gyorsasága:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(BA)}{dt} = B\frac{dA}{dt} = -B\ell v = -\varepsilon .$$

Általánosan, ha egy irányított – nem feltétlenül merev – zárt vezetőhurok mágneses mezőben mozog, akkor a benne indukált elektromotoros erőt Faraday törvénye adja:

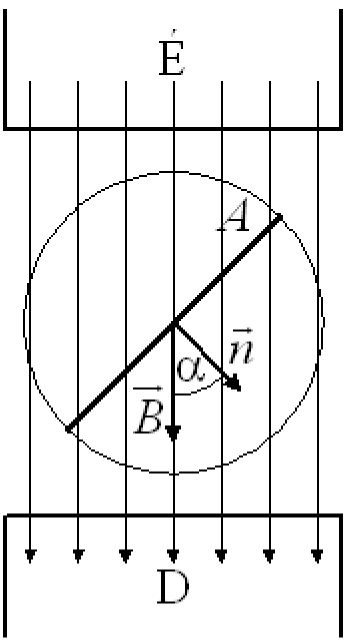
$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Tehát a zárt vezetőhurokban indukált elektromotoros erő egyenlő a zárt hurok által körülfogott mágneses fluxus változási gyorsaságának ellentettjével (**Fluxus-szabály**).

A fluxus-szabály segítségével az indukált elektromotoros erő gyakran könnyebben számítható, mint a Neumann-törvénnyel. Az is könnyen látható, hogy ha homogén mágneses mezőben egy vezető keret haladó mozgást végez, akkor nem indukálódik benne feszültség.

Váltakozó áramú generátor

Tekintsünk egy téglalap alakú vezető keretet. Keresztmetszete legyen *A*, és forogjon állandó ω szögsebességgel homogén mágneses mezőben. A mágneses mező indukciója legyen $\vec{B}$. A kezdeti pillanatban legyen $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{B}$. Először írjuk fel a **mágneses indukciófluxust** mint az idő függvényét:



$$\Phi = \int_F \vec{B} d\vec{A} = B A \cos\alpha = B A \cos\omega t$$

mivel $\alpha = \omega t$. Alkalmazzuk a Faraday-törvényt az indukált elektromotoros erő kiszámítására:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = B A \omega \sin\omega t \cdot$$

Használjuk az $\mathcal{E}_0$ jelölést az elektromotoros erő csúcsértékére $\mathcal{E}_0 = B A \omega$, ezzel

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin\omega t \,,$$

Azaz szinuszos váltakozó feszültség generálódott. Ha egymenetű keret helyett *N* menetű tekercset alkalmazunk, akkor az erővonalak mindegyik meneten átmennek, vagyis a fluxus (és annak változási gyorsasága) N-szeresére nő. Tehát a váltakozó áramú generátor elektromotoros ereje:

$$\mathcal{E} = N A B \omega \sin\omega t$$

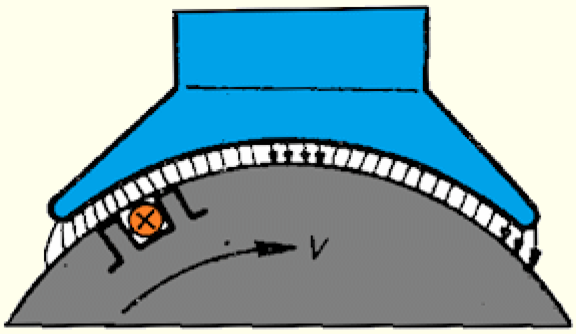
ANIMÁCIÓ

Alkalmazás:

Napjainkban a villamos energia szinte nélkülözhetetlen életünkből. Azonban fontos tudnunk, hogy ezen energiafajta döntő hányadát (kb. 98%) elektromágneses indukció segítségével állítják elő. A villamos energia előállítására szinte kizárólag szinkrongenerátorokat használnak. Az elnevezés onnan ered, hogy a forgórész és a forgó mágneses mező fordulatszáma megegyezik. Lényegében a fenti ábra megfordításáról van szó: az állórész tartalmazza a tekercseket, a forgórészen pedig állandó mágnes van elhelyezve (gerjesztett vasmagos tekercs). A fenti elrendezés mellőzésének gyakorlati oka van. Ugyanis ha egy forgó testről szeretnénk (galvanikus úton) elektromos teljesítményt levenni, akkor azt pl. csúszógyűrűkkel valósíthatjuk meg, melyekhez szénkefék csatlakoznak. Azonban ily módon nagyfeszültséget szikramentesen levenni igen nehéz. Tehát a gyakorlatban a forgó állandó mágnes egy forgó mágneses mezőt hoz létre, amely a külső álló tekercsekben feszültséget indukál. Ezt a feszültséget később feltranszformálják, majd a villamos hálózatba táplálják. A vízerőművekben pl. a víz forgatja a mágneseket, vagyis a víz helyzeti energiája alakul át elektromos energiává. Ezeket a generátorokat nagyon nagy teljesítményűre is készíthetik: a Kínában épülő Három Szurdok vízerőműbe 26db egyenként 700MW-os szinkrongenerátort építenek be, tehát az együttes teljesítmény 18200MW. Csupán az arányok kedvéért megjegyezzük, hogy a Paksi Atomerőmű 4 blokkjának együttes villamos teljesítménye 2000MW.

1. Példa mozgási indukcióra:

A következő ábrán egy kiálló pólusú gép látható: a kiálló mágneses pólust kék színnel, a forgórészt szürkével jelöltük, mely tartalmazza a narancssárga színnel jelölt tekercseket (ez esetben a tekercs 1 menetes).



A pólus és a gép forgórésze között egy szűk légrés található, melyben az indukcióvonalak közel párhuzamosak és állandó sűrűségűek. Így itt egy B indukciójú homogén mágneses tér alakul ki. A forgórész külsején, annak tengelyével párhuzamosan vezetők találhatóak, melyek tengelyirányú hossza l. Ha a forgórész forog, akkor a benne elhelyezett vezetők v_k kerületi sebességgel fognak haladni a rögzített póIushoz képest. A sebesség iránya pontosan merőleges lesz a vezetők irányával, mivel azok párhuzamosak a tengellyel. Továbbá mind a vezető, mind annak sebessége merőleges lesz az indukcióvonalakra. Így a mozgási indukció törvénye alapján a pólus alatt való elhaladásakor elektromotoros erő (elektromos feszültség) fog indukálódni a vezetőben. Mivel mindhárom komponens kölcsönösen merőleges egymásra, így felírható az $\varepsilon = v_k B l$ összefüggés.

Számolási Feladat

Feladat: Számítsuk ki, hogy mekkora maximális feszültség indukálódik a pólus alatt elhaladó, a tengelytől r=10 cm távolságban lévő $l = 40\ \mathrm{cm}$ hosszúságú vezetőben, ha a forgórész n=2950 1/min fordulatszámmal forog, és a pólusnál B=1,2 T a mágneses indukció. Mekkora áram fog folyni a vezetőben és mekkora lesz a villamos teljesítmény, ha az egy R=0,4 Ω-os áramkör része? Mekkora erő és mechanikai teljesítmény szükséges az árammal átjárt vezető mágneses térben való mozgatásához?

A megoldáshoz elsőként a már fentebb leírt összefüggést kell alkalmaznunk, bár most a maximális indukált feszültséget kell meghatároznunk. Ez a feszültség akkor alakul ki, amikor a vezető a pólus alatti homogén térben halad. Akkor ugyanis, amikor a vezető közelíti, vagy épp elhagyja a pólust, szórt indukcióvonalakat metsz (az ábrán a pólus széleinél láthatóak) melyek szintén indukálnak benne feszültséget. Ezen feszültségek értéke azonban kisebb a maximálistól, mivel itt kisebb az indukció értéke. Továbbá szükséges még a kerületi sebesség ismerete. Ez azonban könnyen kiszámítható a fordulatszám és a sugár ismeretében:

$$v_k = 2r\pi \cdot \frac{n}{60} = 30{,}89\frac{m}{s}\ .$$

Tehát az indukált maximális feszültség:

$$\varepsilon = v_k B l = 14{,}828V\ .$$

Ez a feszültség a vezetőben Ohm törvénye alapján I=37,07A áramot fog hajtani. Ekkor a villamos teljesítmény:

$$P_{vill} = U \cdot I = 549{,}67W\ .$$

Az I árammal átjárt l hosszúságú vezető B homogén mágneses mezőben való mozgatásához $F = BIl = 17{,}794\mathrm{N}$ erő szükséges (Ampere-erő), mivel a tényezők iránya merőleges egymásra. Ekkor a mozgatáshoz szükséges mechanikai teljesítmény:

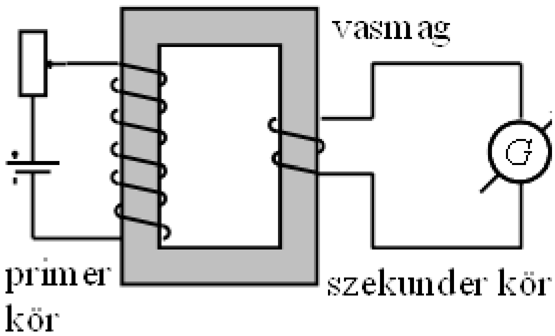
$$P_{mech} = F \cdot v_k = 549,68W \ .$$

Látható, hogy a mechanikai és a villamos teljesítmény kerekítési hibáktól eltekintve megegyezik. Ez az energia-megmaradás miatt szükségszerű is.

Azt a példát, amikor a mágnes forog és a tekercs áll, a nyugalmi indukció után tárgyaljuk.

2. Nyugalmi indukció

Az előző fejezetben azt kaptuk, hogy egy zárt vezetőkörben áram indukálódik, ha a **mágneses indukciófluxus,** azaz a $\vec{B}$ felületre vett integrálja változik. Ez az integrál nem csak úgy változhat, hogy a görbe alakja vagy helyzete, azaz az integrálási tartomány változik, hanem úgy is, hogy az integrandus, azaz a $\vec{B}$ vektor nagysága vagy iránya változik az időben (esetleg az integrálási tartománnyal együtt). Ha az integrálási tartomány nem változik, azaz nincs mozgás, $\vec{B}$ pedig változik, nyugalmi indukcióról beszélünk.



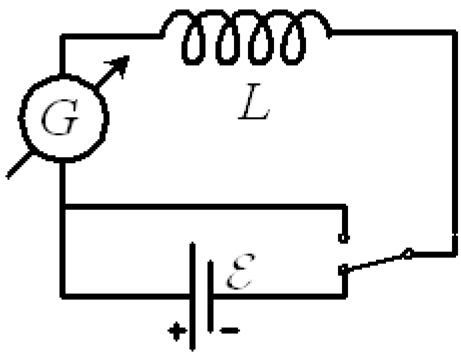
A nyugalmi indukció jelensége, kölcsönös indukció

Tekintsük a fenti elrendezést. Mindaddig, amíg a változtatható ellenállással változtatjuk az áramerősséget a primer körben, változni fog az általa gerjesztett mágneses tér indukciója. Ezeket az indukcióvonalakat a szekunder kör körülfogja, és változik a szekunder fluxus. A tapasztalat szerint, amíg a fluxust változtatjuk, a szekunder körben áram folyik. Az áram létrejöttének oka itt nem lehet a Lorentz-erő, hiszen a szekunder vezető nem mozog.

A jelenség magyarázata az, hogy az időben változó mágneses mező elektromos teret indukál, és ez az indukált elektromos mező mozdítja el a szekunder vezeték szabad elektronjait. Ez a nyugalmi indukció jelensége.

A fenti kísérletben leírt konkrét jelenséget kölcsönös indukciónak nevezzük, ilyenkor a primer kör áramának változása indukál feszültséget a szekunder körben.

Tekintsük most a következő elrendezést:



A nyugalmi indukció jelensége, önindukció

A tapasztalat szerint, ha a tekercset az áramforrásról lekapcsoljuk és egyben rövidre zárjuk, akkor az árammérő mutatója nem ugrik rögtön a nullára (mint ahogy tekercs nélkül tenné), hanem egy ideig még fokozatosan csökkenő áramerősséget jelez. A jelenség magyarázata az, hogy az áramforrást lekapcsolva változik a mágneses mező fluxusa, ez elektromos mezőt indukál, és ez tartja fenn az áramot egy ideig. A jelenséget önindukciónak nevezzük, ilyenkor az indukált feszültséget a vezetőkör saját áramának változása okozza.

Összegezve, a **Faraday-féle indukciótörvény** tömör alakja:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \text{ ,}$$

ahol $\Phi = \int_F \vec{B} d\vec{A}$ a **mágneses indukciófluxus**. Részletesebben kiírva

$$\oint_g \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_F \vec{B} d\vec{A}$$

Rögzített zárt vonal mentén az indukált elektromos feszültség egyenlő a zárt vonal által körülfogott mágneses fluxus változási gyorsaságának ellentettjével. Az indukált elektromos mező nem örvénymentes, ezért nem is konzervatív.

A negatív előjel azt fejezi ki, hogy az indukció miatt létrejött áram az őt létrehozó hatással (a mágneses tér változásával) ellentétes hatást fejt ki, azaz ha a mágneses fluxus csökken, akkor olyan irányú áram indukálódik, amely a fluxust növeli, így az nem csökken olyan gyorsan, mint indukció nélkül tenné (lásd a fenti példát). Ezt a szabályt *Lenz-törvénynek* is nevezik. Ha nem lenne ott a negatív előjel, az indukció növelné az őt létrehozó hatást, akkor öngerjesztő folyamat indulna be, amely ellentmondana az energia-megmaradás törvényének.

VIDEÓ: LENZ-TÖRVÉNY

Elektromos mezőt tehát nem csak töltések kelthetnek, hanem időben változó mágneses mező is. A töltések keltette mező forrásos, s ha a töltések nyugszanak, vagy áramlásuk stacionárius, akkor örvénymentes. Az időben változó mágneses mező keltette indukált elektromos mező - épp ellenkezőleg - forrásmentes és örvényes.

Szolenoid tekercs önindukciós együtthatója

Amint azt korábban levezettük, egy hosszú vékony tekercsben a mágneses térerősség és a mágneses indukció:

$$H = \frac{NI}{l}, \quad B = \mu \frac{NI}{l}$$

Írjuk fel az egyetlen menet által körülfogott **mágneses indukciófluxust** (menetfluxus):

$$\Phi_m = \int_A \vec{B} d\vec{A} = BA = \mu \frac{NA}{l} I$$

A tekercsfluxus egyenlő a menetfluxusok összegével, így

$$\Phi = N\Phi_m = \mu \frac{N^2 A}{l} I$$

A tekercsfluxus arányos az őt gerjesztő árammal: $\Phi = LI$. Az arányossági tényező definíció szerint L, az önindukciós együttható, ami szolenoidra:

$$L = \frac{\mu N^2 A}{l}$$

Az önindukciós együttható mértékegysége: $[\mathrm{L}] = 1\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} = 1\,\mathrm{henry} = 1\mathrm{H}$

Ha egy tekercsben váltakozó áram folyik, akkor $\Phi = LI(t)$

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

Tehát a tekercsben indukálódott feszültség arányos az áram változási gyorsaságával és az önindukciós együtthatóval. Utóbbiban benne van a menetszám négyzete (ezért van sok menete a tekercseknek) és a permeabilitás (ezért szoktak vasmagot tenni a tekercsekbe).

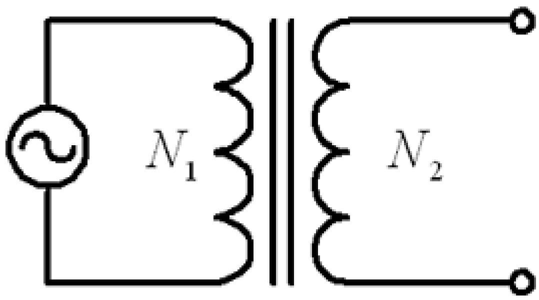
Mivel *L* arányos N^2-tel, sokmenetű tekercs önindukciós együtthatója olyan nagy, hogy az egyben az egész vezető kör induktivitásának tekinthető.

A tekercsben lévő mágneses mező energiája az 1/2BH energiasűrűség és az $A\ell$ térfogat szorzata, azaz $E_m = \frac{1}{2}\frac{NI}{\ell}\cdot\mu\frac{NI}{\ell}\cdot A\ell = \frac{1}{2}\mu\frac{N^2A}{\ell}I^2 = \frac{1}{2}LI^2$.

A geofizikában a mágneses tér mérésének egyik igen gyakran alkalmazott eszköze, a protonprecessziós magnetométer a mágneses indukció jelenségét használja ki. Működési elve igen egyszerű: hidrogén-atommagok mágneses térben előálló precesszióján alapszik. Az érzékelő elem egy kb. fél literes, víztartalmú, henger alakú, műanyag edény. Nyugalmi állapotban a vízben lévő H-atommagok mágneses momentumai a földi térrel parallel vagy antiparallel helyzetben vannak. A henger palástján lévő szolenoid tekercsben egyenárammal a földi térre közel merőleges mágneses teret hoznak létre. Ekkor az edényben lévő H-atommagok mágneses momentumai a tekercs által létrehozott mágneses térnek megfelelő irányba állnak be. Az áram kikapcsolása után a H-atommagok mágneses momentumai precessziós mozgást végeznek – a pörgettyűhöz hasonlóan – a földi mágneses tér iránya körül, ami a tekercsben váltakozó feszültséget indukál. A váltakozó feszültség frekvenciája egyenesen arányos a mérni kívánt mágneses térerősséggel.

Kölcsönös indukció együtthatója szoros csatolás esetén

Tekintsünk két nyugalomban lévő tekercset egymás közelében. A primer tekercs menetszáma legyen N_1, a szekunder tekercsé pedig N_2. Ha a primer tekercsben folyó áram I_1, akkor az indukció:



A kölcsönös indukció szoros csatolás esetén

$$B_1 = \mu \frac{N_1 I_1(t)}{l}$$

a menetfluxusa pedig:

$$\Phi_1 = \mu \frac{N_1 A}{l} I_1(t)$$

A szoros csatolás azt jelenti, hogy a primer tekercs menetfluxusa egyben a szekunder tekercs menetfluxusa is (vagyis az indukcióvonalak közösek), így a szekunder tekercs teljes fluxusa:

$$\Phi_{12} = N_2 \Phi_1 = \mu \frac{N_1 N_2 A}{l} I_1(t)$$

A kifejezésből kiolvasható, hogy a szekunder tekercs fluxusa arányos a primer árammal, az arányossági tényező *M*, a kölcsönös indukció együtthatója: $\Phi_{12} = MI_1$, ahol

$$M = L_{12} = \mu \frac{N_1 N_2 A}{l}$$

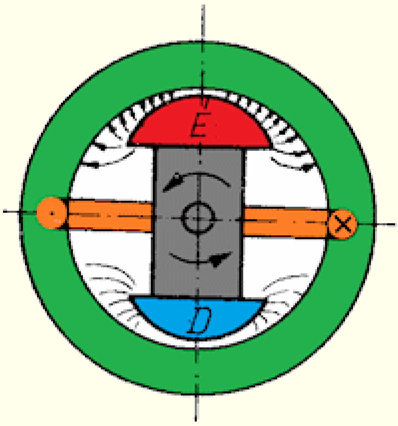
A szekunder tekercs kapcsain az indukált feszültség:

$$U_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}$$

A jelenséget azért is nevezik kölcsönös indukciónak, mert visszafele is működik (a fenti okoskodás fordított szereposztásban is végigvihető), mi több, $L_{12}=M=L_{21}$.

PÉLDA: AZ ELEKTROMÁGNESES INDUKCIÓ ALKALMAZÁSA.

A képen látható szinkrongép részei: állórész (zöld színnel); ezen helyezkedik el a narancssárga színnel jelölt tekercs (esetünkben egy menetes, a menet téglalap alakú, az ábra síkjában fekvő oldal hossza a, a merőleges oldalé pedig b); szürke-forgórész, mely tartalmazza az állandó mágnest. A kétpólusú állandó mágnesből készített 3000/min fordulatszámú forgórész és az állórész között B= 1,1T maximális indukció mérhető. Mekkora az állórész egy menetében indukált maximális feszültség, ha az oldalának hatásos hossza b=20cm és ezek az oldalak egymástól a=15cm távolságra vannak?



Egymenetes állandó mágnes forgórészű szinkrongenerátor

Megoldás: Mivel a tekercs áll, a jelenség még akkor is nyugalmi indukciónak tekintendő, ha a mágneses mező változását egy mozgó mágnes okozza. Az indukált elektromotoros erő a

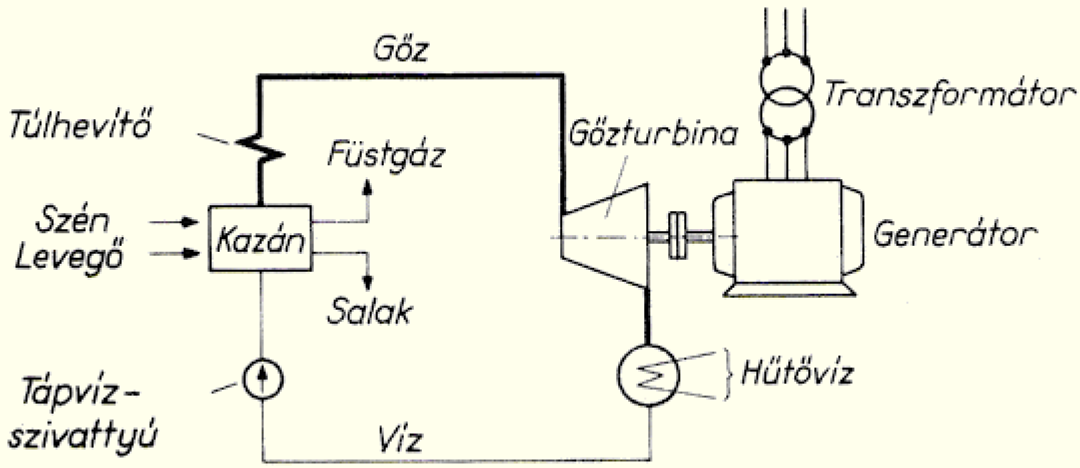
$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ képlettel számolandó ahol a fluxus $\Phi = \int_F \vec{B}\,d\vec{A}$. Ha a forgó mágnes már majdnem vízszintes, a mágnes tengelye a tekercs síkjával egy egészen kis α szöget zár be, a menetfluxus $\Phi = BA\sin\alpha = Bab\sin\omega t$. (A mágnes tengelye mentén a mágneses mező homogénnek tekinthető, amelyben mindenütt B=1,1T.) Ezzel

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = B\,ab\,\omega\cos\omega t\ ,$$

amelynek maximális értéke (α=0-nál) $\mathcal{E}_{max} = B\,ab\,\omega$, számértékekkel $\mathcal{E}_{max} = 1{,}1\cdot 0{,}15\cdot 0{,}2\cdot 2\pi\cdot\frac{3000}{60} = 10{,}37V$.

Megjegyzendő, hogy nagy α szögekre, amikor a mágnes pólusai már kifordultak a tekercs síkjából, a fluxus a mágnes forgása ellenére sem változik, ezért ekkor az indukált feszültség nulla. Tehát ebben a leegyszerűsített modellben az indukált feszültség közelítőleg sem szinuszos.

Hőerőmű: A következő ábrán a hőerőművekben legelterjedtebben használt energiaátalakítási folyamat látható. Az ábra segítségével megérthető, hogy hogyan alakul át a fosszilis energiahordozó (pl. szén) kémiai energiája villamos energiává, mely a villamoshálózaton keresztül otthonunkba jut. Az energiahordozót kazánokban égetik el, így magas hőmérsékletű füstgázok képződnek. Ezek segítségével vizet forralnak el. Ezután a vízgőzt a túlhevítőben tovább melegítik, ezzel is növelve annak fajlagos energiatartalmát. Ezt a nagy hőmérsékletű (kb. 540°C) vízgőzt hőszigetelt csöveken a turbinához vezetik. A turbinán keresztülhaladva a vízgőz expandál (tágul), és a turbinalapátokon munkát végez. Így a turbina a vízgőz energiájának nagy részét mechanikai energiává, forgássá alakítja. A turbina tengelye szinkrongenerátorhoz kacsolódik. A generátorban a betáplált mechanikai energia az elektromágneses indukció elvét felhasználva elektromos energiává alakul át. A generátor egy transzformátorral van összekötve, amely szintén az elektromágneses indukció, konkrétabban a kölcsönös indukció elvén működik és a generátor feszültségét a gazdaságos szállíthatóság érdekében feltranszformálja (azaz az áramot letranszformálja). A turbinából kilépő fáradt gőz a hűtővíz segítségével újra folyadékká alakul (kondenzálódik). Az így kapott vizet a tápvíz-szivattyúval újra a kazánba juttatják, majd ismét kezdődhet a ciklus.

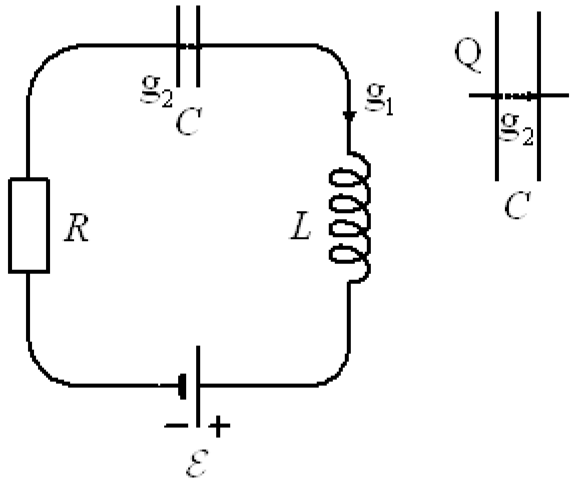


3. Az általánosított huroktörvény és alkalmazásai

A huroktörvény általánosítása váltóáramra egyetlen hurok esetén

Tekintsük egy olyan hurkot, amely egy ellenállást, egy kondenzátort, egy tekercset, és egy áramforrást tartalmaz.

Legyen *R* a teljes kör ellenállása, *C* a kondenzátor kapacitása, *L* a tekercs (és egyben az egész hurok) önindukciós együtthatója, illetve E az alkalmazott elektromotoros erő.



Huroktörvény általánosítása

Íjuk fel a nyugalmi indukció Faraday-törvényét a hurokra:

$$\oint_g \vec{E}d\vec{s} = -\frac{d\left(\int_A \vec{B}d\vec{A}\right)}{dt}$$

Mivel a tekercs önindukciós együtthatója egyben a kör indukciós együtthatója is:

$$\oint_g \vec{E}d\vec{s} = -L\frac{dI}{dt}$$

A *g* zárt görbét az ábrán látható módon bontsuk fel két részre, g_1 haladjon a vezetőben, g_2 pedig a kondenzátor lemezei közötti szigetelőben. A g_2 görbén a térerősség integrálja nem más, mint a kondenzátoron eső feszültség, Q/C. Így ha a térerősségre vonatkozó összegzést a g_1, g_2, szakaszokra külön kiszámoljuk, akkor az alábbi egyenletet nyerhetjük:

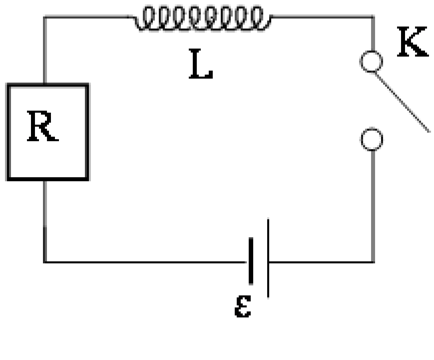
$$IR - \mathcal{E} + \frac{Q}{C} = -L\frac{dI}{dt}$$

A Kirchhoff-hurokegyenlet általánosítása soros *RLC* körre:

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}$$

Tekercs rákapcsolása állandó feszültségre

Legyen a tekercs L induktivitása állandó, a kör ohmos ellenállása R, az áramforrás állandó elektromotoros ereje ε. A kapcsolót a t=0 időpillanatban zárjuk. Kérdés, hogyan változik az I áramerősség.



Ha hirtelen ($\Delta t=0$ idő alatt) nulláról $I>0$ értékre nőne, akkor dI/dt és ezzel az indukált feszültség végtelen nagy lenne, ami lehetetlen. Következésképp $I(0)=0$. A differenciálegyenlet:

$$IR-\mathcal{E}=-L\frac{dI}{dt}$$

Ez egy szétválasztható típusú differenciálegyenlet. A változók szétválasztása után integrálunk:

$$\int_0^I \frac{dI}{\varepsilon-RI}=\frac{1}{L}\int_0^t dt$$

Az integrálást elvégezve:

$$\frac{1}{R}\ln\frac{\varepsilon-RI}{\varepsilon}=-\frac{1}{L}t$$

R-rel átszorozva, e-adra emelve kifejezhető az áramerősség:

$$I(t)=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)=I_\infty\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Felhasználtuk, hogy $t=\infty$-re $I_\infty=\varepsilon/R$-nek adódik. Vezessük be a $\tau=L/R$ mennyiséget, amelyet időállandónak vagy a kör relaxációs idejének is neveznek. Ezzel az áramerősség:

$$I(t)=I_\infty\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

Az áramerősség tehát exponenciálisan tart a maximális I_∞ értékhez. Ha a tekercset hirtelen lekapcsoljuk az állandó feszültségről és egyben rövidre zárjuk, ennek a fordítottja játszódik le, az áram exponenciális függvény szerint tart a nullához: $I(t)=I_0e^{-t/\tau}$. Erről úgy győződhetünk meg, ha a fenti levezetést $I(t=0)=I_0$ és $\varepsilon=0$ értékekre megismételjük.

ANIMÁCIÓ

Kondenzátor kisütése

Egy Q töltésre, azaz $U_0=Q_0/C$ feszültségre feltöltött kondenzátort R ellenálláson keresztül kisütünk. A huroktörvény:

$$IR+\frac{Q}{C}=0 \text{ , ahol } I=\frac{dQ}{dt}$$

Idő szerint deriválva és átrendezve kapjuk a differenciálegyenletet az áramerősségre:

$$\frac{dI}{dt}=\frac{-1}{RC}I$$

ahol I_0 a kezdeti kisütő áram erősségét jelenti. Ez az egyenlet is szétválasztható: $\int_{I_0}^{I}\frac{dI}{I}=\frac{-1}{RC}\int_0^t dt$.

A megoldás: $\ln\frac{I}{I_0}=\frac{-1}{RC}t$. azaz

$$I(t)=I_0e^{-\frac{t}{RC}}=I_0e^{-t/\tau} \text{ ,}$$

ahol τ =RC az RC kör időállandója, $I_0=U_0/R$. Ez azt az időt adja meg, amely alatt *e*-adrészére csökken az áramerősség.

A tranziens jelenségekről általában

Az előzőekben tárgyalt két eset fordítva is hasonlóan játszódik le. Levezethető, hogy ha egy tekercset hirtelen lekapcsolunk a feszültségről (a nyugalmi indukciónál tárgyalt módon), akkor az áramerősség exponenciálisan tart a nullához. Hasonlóan, ha egy kondenzátort hirtelen feszültségre kapcsolunk, fokozatosan töltődik fel. Mindezeket (az alább ismertetettektől eltérően) tranziens jelenségeknek nevezzük, mivel arról szólnak, hogy amikor a külső hatás (az áramforrás feszültsége) hirtelen megváltozik, először egy átmeneti (tranziens) állapban van a rendszer és ezen keresztül fejlődik a végleges állapot felé (amikor konstans az áram). Megjegyezzük, hogy ha ohmos ellenállás nélküli tekercsen keresztül zárunk rövidre egy feltöltött kondenzátort, akkor a harmonikus rezgés differenciálegyenletével analóg egyenletet kapunk, amelynek a megoldása szinuszos/koszinuszos rezgés, ez tehát szigorúan véve nem tranziens jelenség. Ha ebbe a körbe még ohmos ellenállást is iktatunk, azon hő fejlődik, az energia disszipálódik, ezért csillapított rezgést jön létre

Kondenzátor szinuszos váltakozó feszültségen

Az egyenáramra nézve a kondenzátor szakadást jelent, de váltakozó feszültség hatására periodikusan feltöltődik és kisül. Így a váltakozó áram folytonosan folyik a körben anélkül, hogy a lemezek közötti szigetelő rétegben töltések áramlanának. Az általános Kirchhoff-hurokegyenletből kapjuk, hogy a kondenzátor U=Q/C feszültsége az áramforrás ε elektromotoros erejével egyenlő. Mivel $\varepsilon(t)= U(t)=U_0\sin\omega t$,

$$I(t)=\frac{dQ}{dt}=\frac{d}{dt}(CU_0\sin\omega t)=CU_0\omega\cos\omega t \text{ .}$$

Tehát az áramerősség az időnek koszinuszos függvénye. Ez azt jelenti, hogy a feszültség negyed-periódussal később veszi fel pl. a csúcsértékét, mint az áramerősség. Más szavakkal, az áramerősség és a feszültség között π/2 fáziskülönbség van, vagyis az áramerősség 90°-kal **siet** a feszültséghez képest. Ez azért lehetséges, mert nem a kondenzátor lemezei között lévő feszültség az oka a töltések áramlásának, hanem ennek a feszültségnek a ***megváltozása***. A feszültség csúcsértéke U_0, az áramerősségé $CU_0\omega$, a kettő hányadosaként értelmezhetjük a kondenzátor váltóáramú ellenállását, más néven **kapacitív ellenállását** vagy kapacitanciáját:

$$X_c=\frac{1}{\omega C} \text{ ,}$$

Ez, mint látható, függ a frekvenciától és egyenáramra végtelenné válik.

Ideális tekercs szinuszos váltakozó feszültségen

Ha minden ohmos ellenállást elhanyagolunk, a megoldandó egyenlet: $\mathcal{E} = L\frac{dI}{dt}$, ahol $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$. Idő szerint integrálva kapjuk, hogy $-\varepsilon_0 \cos \omega t / \omega = LI$, azaz $I(t) = -\frac{\varepsilon_0}{L\omega}\cos \omega t$, vagyis az induktivitáson az áram 90°-ot **késik** a feszültséghez képest. A feszültség és az áramerősség csúcsértékének hányadosa a tekercs váltóáramú ellenállása, más néven **induktív ellenállása** vagy induktanciája:

$$X_L = L\omega$$

Egyenáramra ez nulla, a frekvencia növelésével növekszik.

4. Ellenőrző kérdések

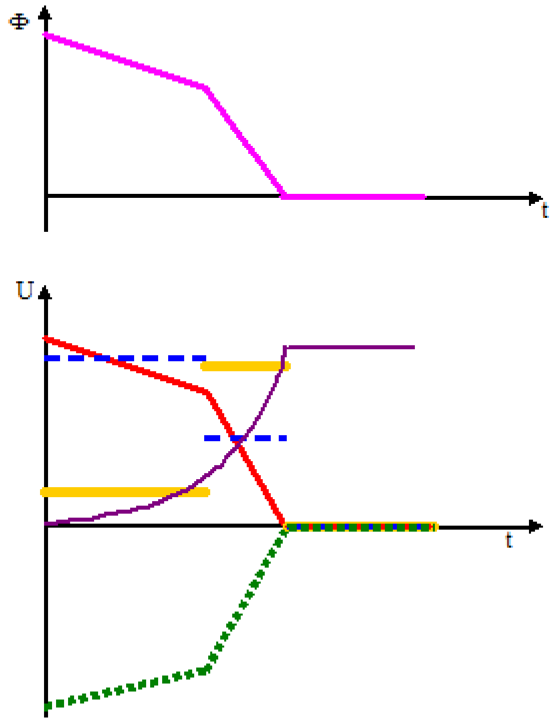
FELADATOK - AZ ELEKTROMÁGNESES INDUKCIÓ

Többször megoldható feladat, **elvégzése kötelező**.
A feladat végső eredményének a mindenkori **legutolsó megoldás** számít.

Oldja meg az alábbi feladatokat

Válassza ki a helyes megoldást!

1. **Egy tekercs fluxusa az alábbi módon változik az időben. Melyik vonal adja meg helyesen a tekercsben indukálódó feszültség időfüggését?**



- kék szaggatott
- sárga vastag

○ zöld pontozott

○ lila görbe

○ piros

2. **Homogén mágneses térbe egy protont, egy elektront és egy neutront lövünk be a térre merőleges, egyforma sebességgel. Melyik mozog kisebb sugarú körpályán?**

○ egyforma lesz a sugár

○ a proton

○ a neturon

○ a mozgás mindhárom esetben egyenes vonalú marad

○ az elektron

3. **Egy homogén anyag-tömbben a mágneses térerősség értéke 5000A/m, a mágneses indukció értéke $6,25 \cdot 10^{-3}$ Vs/m2 . Milyen anyagról lehet szó?**

($\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} As/Vm$, $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$ **)**

○ paramágnes

○ diamágnes

○ ferromágnes

○ egyik sem

4. **Egy tekercset egy másik, álló tekercshez közelítünk, amelynek két kivezetését rövidre zártuk. Melyik feltétel fennállása a <u>legkevésbé</u> lényeges az álló tekercsben kialakult indukált áram erőssége szempontjából?**

○ a mozgó tekercsben nagy áram folyik

○ az álló tekercsben vasmag van

○ a mozgó tekercs belsejét igen jó vezetőképességű anyag (pl. réz) tölti ki

○ az álló tekercs nagy menetszámú

○ a mozgó tekercset nagy sebességgel közelítjük

5. **Milyen alakú zárt felületre igaz, hogy a mágneses indukciófluxus nulla?**

○ csak gömbre

○ a fluxus csak akkor nulla, ha az elektromos térerősség nem változik

○ csak kockára

○ minden zárt felületre igaz

- bármilyen felületre, csak sík lapjai legyenek
- az a fontos, hogy a bezárt térfogat konvex legyen

[1] ez a Lenz-törvény megnyilvánulása, lásd később