

Kinematika

A mozgás matematikai leírása, a mozgást kiváltó ok feltárása nélkül.

Helyvektor és elmozdulás

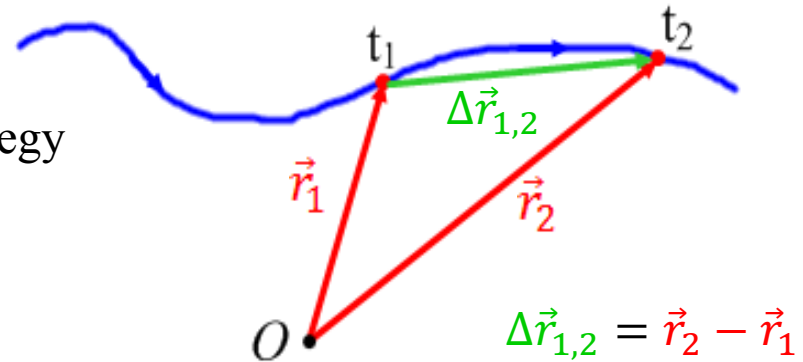
Egy test helyzetét és helyzetváltozását csak más testekhez viszonyítva írhatjuk le. Ezért először választani kell egy vonatkoztatási rendszert:

Egy test (pontszerű) helyzetét a t időpillanatban egy $\vec{r}(t)$ **helyvektorral** jellemezzük, ami a vonatkoztatási rendszer origójából a testhez mutat.

A test mozgása során a térben kijelöli a **pályagörbét**.

Az **elmozdulás** a helyvektor megváltozása egy eltelt Δt idő alatt (itt $\Delta t = t_2 - t_1$).

$$\Delta \vec{r}_{1,2} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$



Sebesség

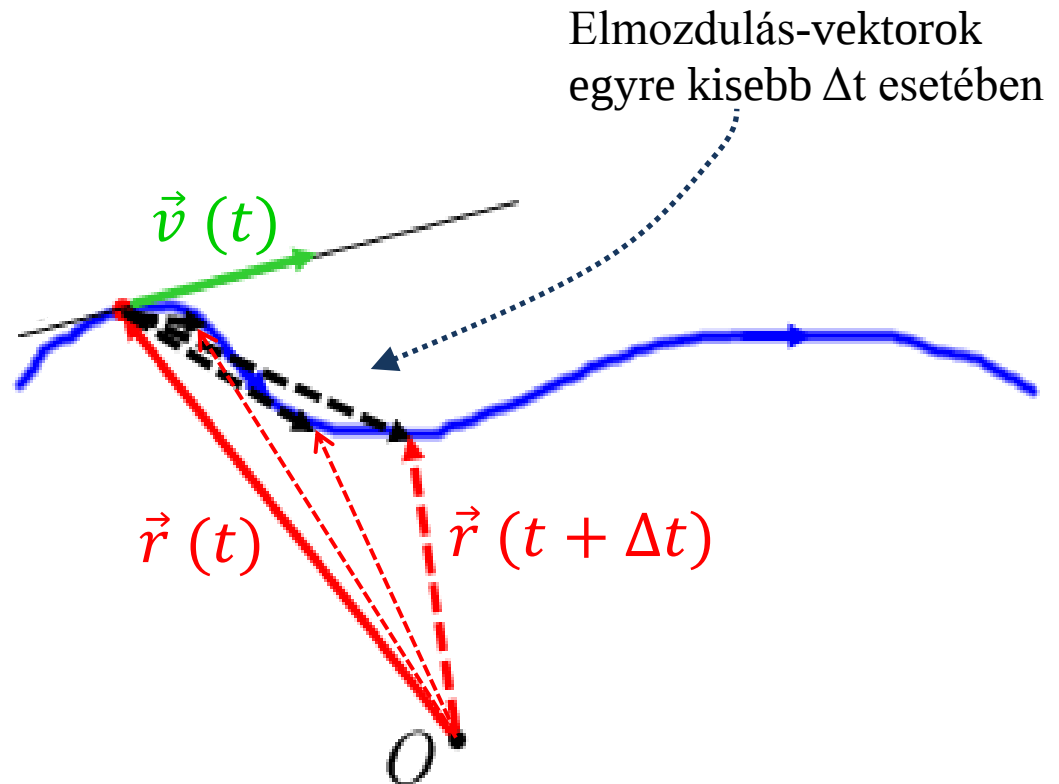
A **sebesség** azt jellemzi milyen gyorsan változik a helyvektor.

FONTOS: a sebesség vektormennyiség, iránya és nagysága is számít!

Ha a sebesség iránya és/vagy nagysága változik (általában igen), akkor pontos értéket csak kis Δt időre kaphatunk.

Teljesen pontos, ha $\Delta t \rightarrow 0$.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



Gyorsulás

A **gyorsulás** a sebességvektor változási gyorsasága:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

FONTOS: gyorsulás akkor is van ha csak a sebesség iránya változik. Pl. kanyarodás

Ha a gyorsulás, mint az idő függvénye, valamint a kezdeti hely $\vec{r}_0$ és a kezdeti sebesség $\vec{v}_0$ ismert, akkor a mozgás pályája meghatározható:

Első lépés a sebesség idő függvény meghatározása:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \vec{a} dt = d\vec{v}$$

Bármely t_1 időpontban a sebesség: $\vec{v}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t) dt + \vec{v}(t_0)$

A végén a t_1 paraméter helyett simán t -t írunk, és megvan a $\vec{v}(t)$

A sebességfüggvény ismeretében a helyvektor bármely t_1 időpontban hasonlóképpen meghatározható:

$$\vec{r}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t) dt + \vec{r}(t_0)$$

A végén a t_1 paraméter helyett simán t -t írunk, és megvan az $\vec{r}(t)$ függvényünk.

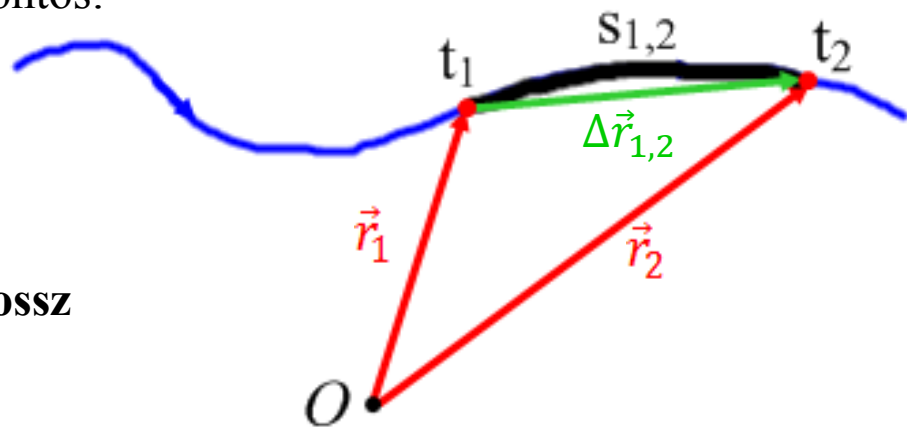
Úthossz és átlagsebesség

Egy adott idő alatt megtett **úthossz** a közben befutott pályagörbe hosszát jelenti. Ez már csak egy skalár mennyiség.

Számításánál csak a sebesség nagysága fontos:

$$s_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)| dt$$

Az ábra szemlélteti a különbséget az **úthossz** és az **elmozdulás(vektor)** között!



Az **átlagsebesség** (skalár) az a sebességnagyság amivel egyenletesen haladva ugyanazt a hosszúságú utat tenné meg a test ugyanakkora idő alatt:

Nem vektor jel,
csak egy vonás!

$$\bar{v} = \frac{s_{1,2}}{t_2 - t_1}$$

Derékszögű Descartes koordináta rendszer

Segítségével a pálya egyenlete:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Az $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ függvények a **koordináták**.

Az $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ egységvektorok a **bázisvektorok**.

Pitagorasz tételével: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

A sebesség:

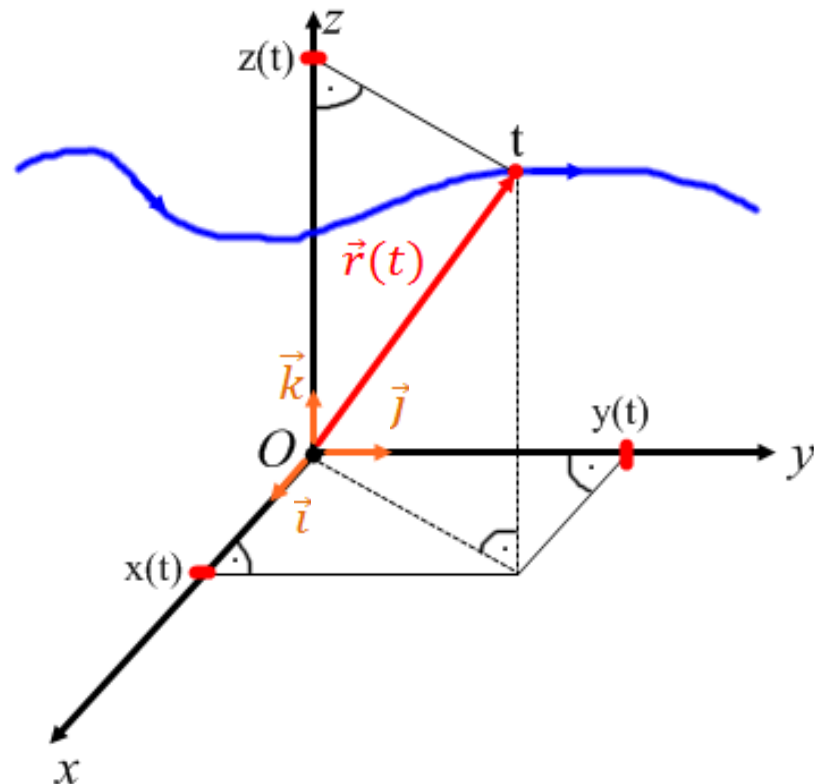
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

A sebesség nagysága: $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

A gyorsulás és nagysága:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$



Példa: Egyenes vonalú egyenletes mozgás *

A mozgás 1 dimenziós, ezért elég egy koordináta ha a mozgás irányába vesszük fel azt az egy tengelyt (pl. x).

Ebben az egyszerű esetben:

$$v_x = v \quad \Delta x = s$$

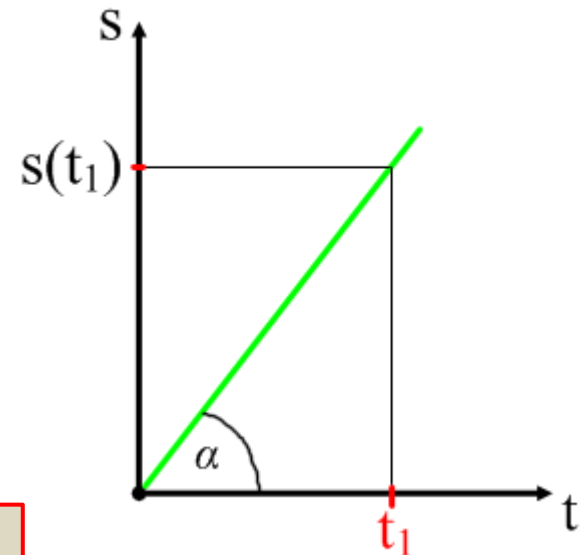
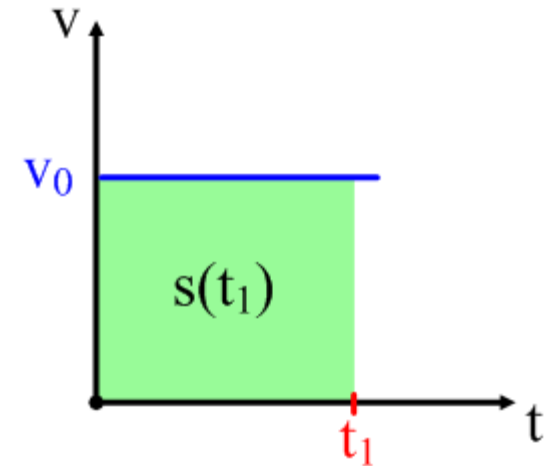
$$s(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} |\vec{v}(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} v dt = v \int_{t_0}^{t_1} dt = v \Delta t$$

Tehát ha $t_0 = 0$, akkor visszkapjuk az $s = vt$ képletet.

A megtett út a sebesség-idő grafikon alatti terület.

Tehát az úthossz lineáris függvénye az időnek, a meredekség pedig a sebesség:

$$\tan \alpha = v = \frac{s}{t}$$



Példa: 1

Példa: Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás*

Ha a kezdősebesség vektor és a gyorsulás vektor egy egyenesbe esik, akkor a test annak az egyenesnek a mentén fog mozogni (ismét elég egy koordináta, pl. z):

tehát a test a z tengely irányában halad állandó a_z gyorsulással, és időtől függő v_z sebességgel (ezek a komponensek lehetnek negatívak is!). A többi komponens (x, y) nulla. A sebesség egy t_1 időpontban:

$$v_z(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} a_z(t) dt + v_z(t_0) = a_z(t_1 - t_0) + v_z(t_0)$$

$$\begin{aligned} \text{legyen } t_0 &= 0 \\ v_z(t_0) &= v_{z0} \end{aligned}$$

Ezekkel: $v_z(t) = a_z t + v_{z0}$

$$(\Delta v_z = a_z \Delta t)$$

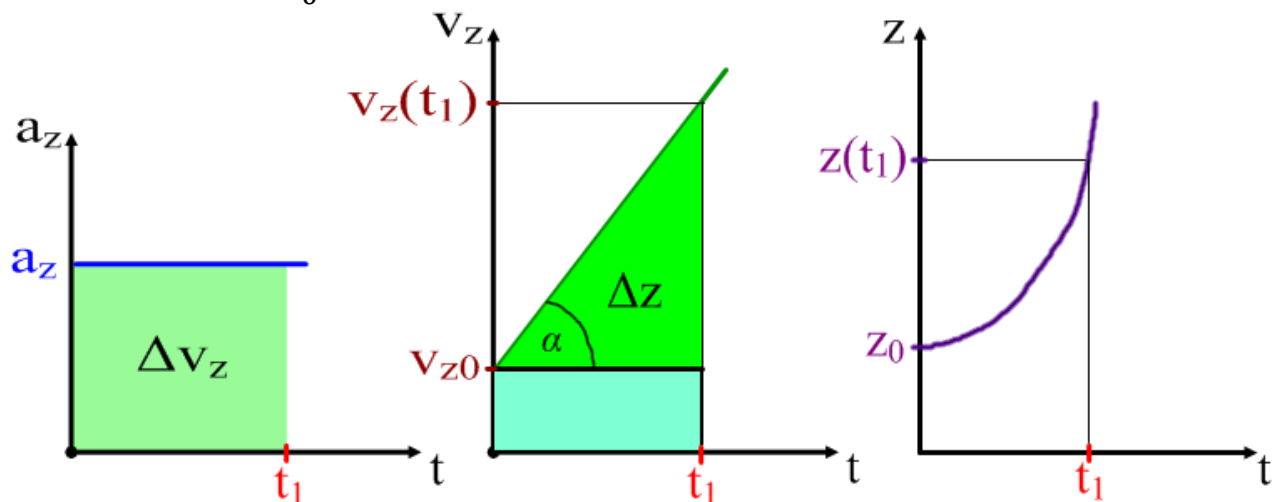
$$\text{A test helye: } z(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} v_z(t) dt + z(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} (a_z t + v_{z0}) dt + z(t_0)$$

$$\text{legyen } z(t_0) = z_0$$

Tehát ha $t_0 = 0$ továbbra is:

$$z(t) = \frac{1}{2} a_z t^2 + v_{z0} t + z_0$$

Példa: 2



Példa: Ferde hajítás

A gyorsulás állandó (g), de nem esik egybe a kezdősebesség vektor irányával:

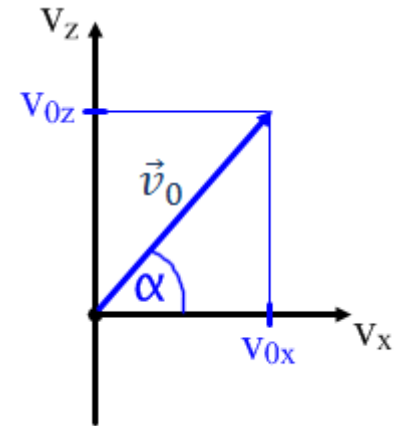
A kezdeti sebesség felbontása (2D – x és z):

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha \quad v_{0z} = v_0 \sin \alpha$$

A gyorsulás: $\vec{a} = -g\vec{k}$

A sebesség-idő függvény: $\vec{v}(t) = v_{0x}\vec{i} + 0\vec{j} + (-gt + v_{0z})\vec{k}$

A helyvektor: $\vec{r}(t) = v_{0x}t\vec{i} + 0\vec{j} + \left(-\frac{g}{2}t^2 + v_{0z}t\right)\vec{k}$



A test földet ér amikor $z = 0$:

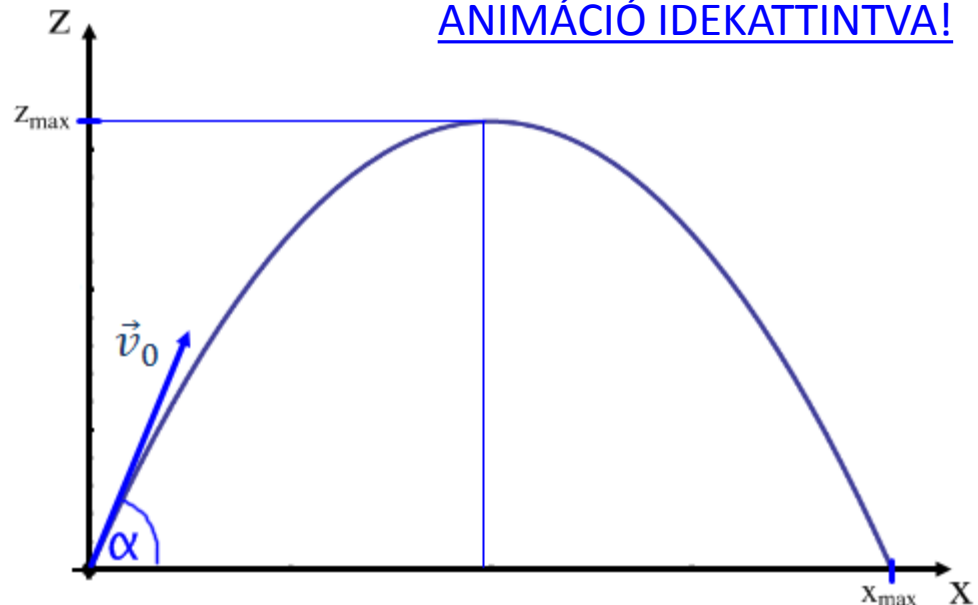
$$-\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin \alpha t = 0$$

Megoldva az időre: $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$

Behelyettesítve az x koordinátára megkapjuk a hajítás távolságát:

$$x_{max} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

[ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!](#)



Síkbeli polár koordináta rendszer

A két koordináta: egy ponttól mért távolság és egy iránytól mért szög.
Körmozgás leírására jól használható, ha az origó a kör középpontjában van.

Pitagorasz tételével és a tangens definíciójából:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

A koordinátákat a másik irányba kifejezve:

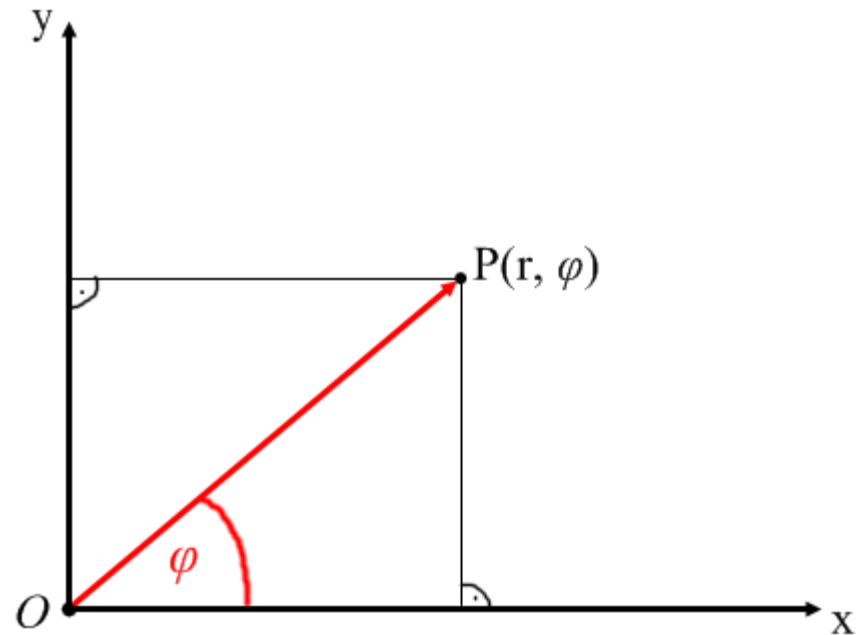
$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

A φ szög változási gyorsasága adja a **szögsebességet** (mértékegysége: 1/s):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

A szögsebesség változási gyorsasága pedig a **szöggyorsulás** (mértékegysége: 1/s²):

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$



**SEBESSÉG ÉS GYORSULÁS
SÍKBELI POLÁR KOORDINÁTÁKKAL:**
[VIDÉÓ IDEKATTINTVA!](#)

Példa: Egyenletes körmozgás

A szögsebesség állandó: $\omega = \text{áll.} = \frac{2\pi}{T}$ $\beta = 0$
(ahol T a periódusidő)

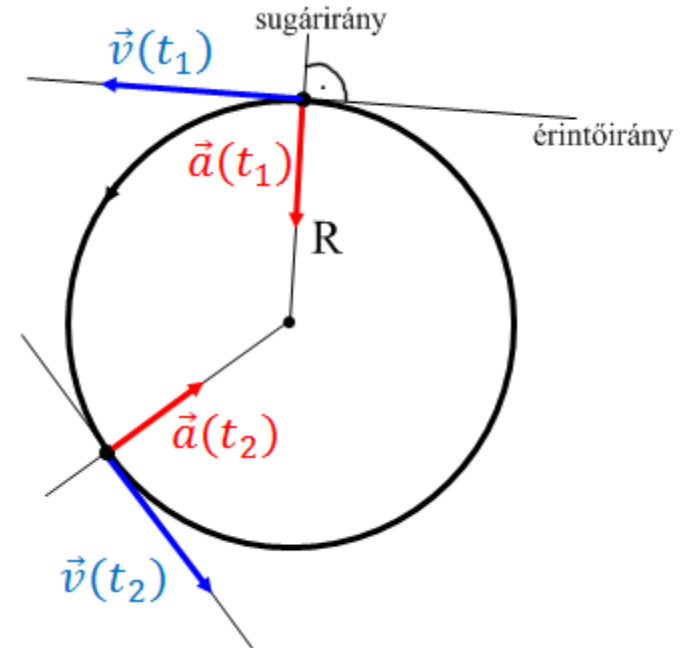
A T idő alatt megtett út tehát a kör kerülete: $s(T) = 2R\pi$

A mozgás sebességének nagysága (kerületi sebesség) is állandó (az iránya viszont nem!):

$$v = \frac{s(T)}{T} = \frac{2\pi R}{T} = R\omega$$

Mivel a sebesség iránya folyamatosan változik, a gyorsulás nem nulla. Nagysága állandó, iránya pedig mindig a középpont felé mutat (centripetális):

$$a = a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2 \omega^2}{R} = R\omega^2$$



[ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!](#)

Példa: Egyenletesen változó körmozgás

A szöggyorsulás $\beta = \text{állandó}$, és emiatt a szögsebesség lineárisan változik:

$$\omega(t) = \beta t + \omega_0$$

Az állandó szöggyorsulás miatt a gyorsulásnak lesz egy állandó nagyságú érintőirányú (tangenciális) komponense. Emiatt a sebesség nagysága egyenletesen változik:

$$a_t = \beta R = \frac{dv}{dt}$$

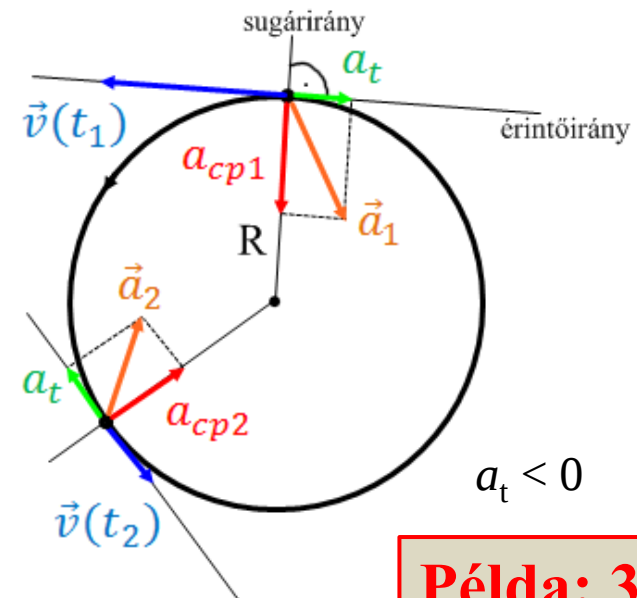
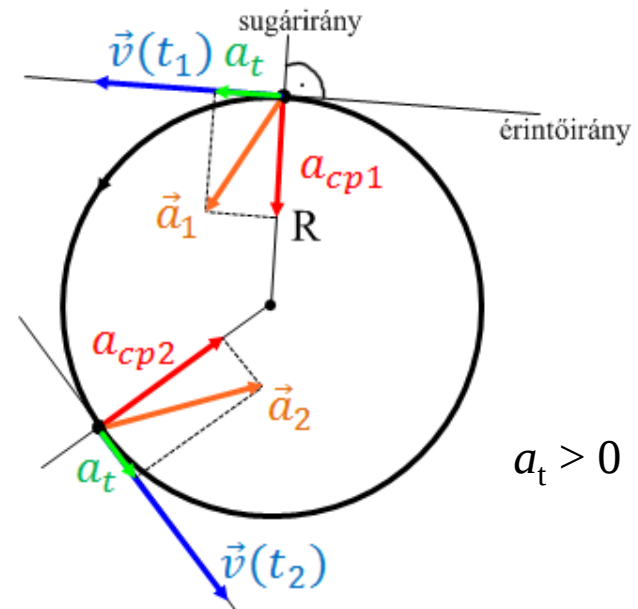
A gyorsulás nagysága Pitagorasz tételéből:

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}$$

A megtett út csak a tangenciális gyorsulás komponensből függ (a másik komponens csak az irányt változtatja):

$$s(t) = \frac{1}{2} a_t t^2 + v_0 t$$

[ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!](#)



Példa: 3

Dinamika

A dinamika feladata a test(ek) gyorsulását okozó erők matematikai leírása.

Az erők kölcsönhatások során lépnek fel.

Ezek a kölcsönhatások lehetnek:

- test és test között
- mező(erőtér) és test között

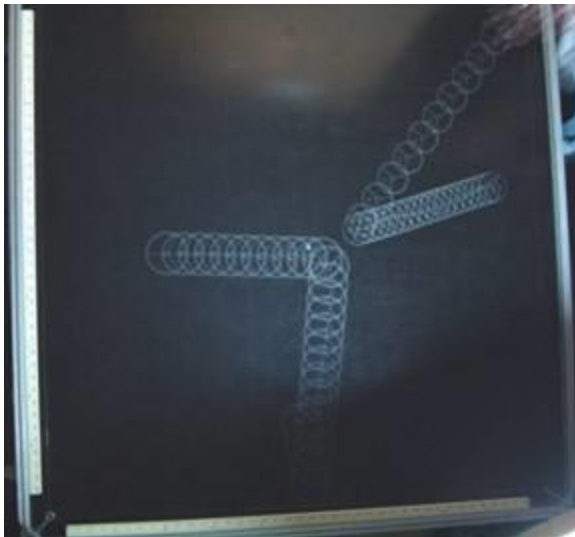
A magára hagyott test egy olyan test, amely nem áll kölcsönhatásban sem más testtel, sem pedig mezővel.

Newton törvényei: I.

Newton I. törvénye: Minden nyugalomban lévő test megtartja nyugalmi állapotát, minden mozgó test pedig egyenes vonalú egyenletes mozgását mindaddig, amíg egy másik test vagy mező annak megváltoztatására nem kényszeríti.

ugyanez kicsit pontosabban megfogalmazva:

Kiválasztási axióma: Létezik olyan vonatkoztatási rendszer amelyben a magára hagyott testek megtartják eredeti mozgásállapotukat (azaz a sebesség vektor állandó). Az ilyen rendszereket **inerciarendszereknek** nevezzük.



A légpárnás asztalon mozgó korong jó közelítéssel egy magára hagyott testnek számít.

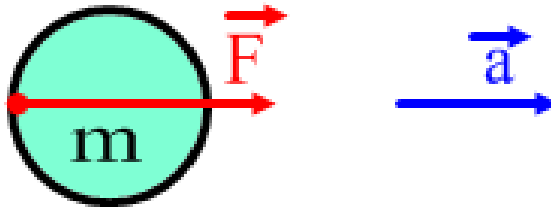
Mozgása az asztalhoz (Föld felszínéhez) képest jó közelítéssel egyenes vonalú egyenletes, tehát a Föld felszínéhez rögzített rendszer jó közelítéssel (mindennapi élet történéseire) inerciarendszer.

Newton törvényei: II.

Ha egy pontszerű testre erő hat az megváltoztatja annak mozgásállapotát (a sebesség vektort). Ekkor a test gyorsul (a gyorsulás vektor nem nulla).

Newton II. törvénye: Egy állandó tömegű pontszerű test gyorsulása arányos a testre ható erővel és ellentétesen arányos a test tömegével. A gyorsulás a testre ható erő irányába mutat.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$



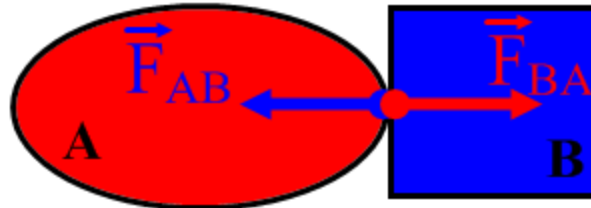
Newton törvényei: III.

Newton III. törvénye: (Hatás-ellenhatás törvénye)

Ha az A test a B testre $\vec{F}_{BA}$ erőt fejt ki, akkor a B test is erőt fejt ki az A testre.

Ez az $\vec{F}_{AB}$ erő azonos nagyságú, de ellentétes irányú az $\vec{F}_{BA}$ erővel.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

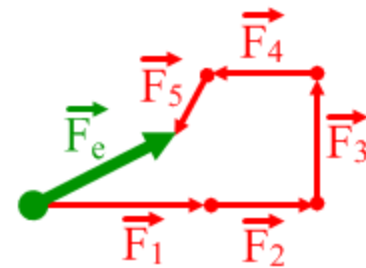
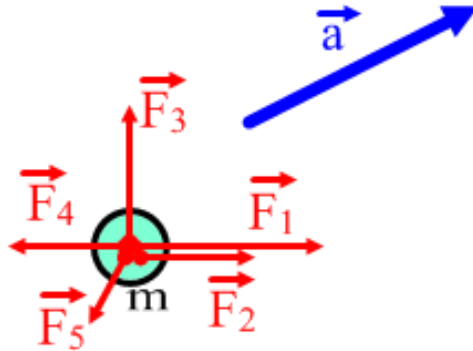


Newton törvényei: IV.

Newton IV. törvénye: (A szuperpozíció elve)

Ha egy tömegpont egyidejűleg több erőhatásnak is ki van téve, akkor azok együttes hatása egy eredő erővel helyettesíthető. Az eredő erő a testre ható összes erő vektori összege:

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}_e}{m}$$



$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^5 \vec{F}_i$$

Erőtörvények

Olyan függvények, amelyek matematikai alakban megadják a testre ható erőket.

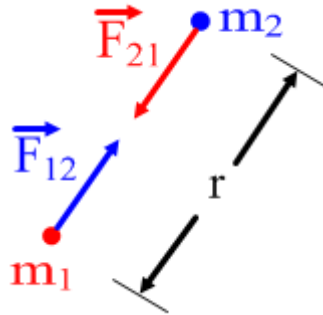
Ezeknek a függvényeknek a változói lehetnek:

- a test helye
- a test sebessége
- az idő

Newton-féle gravitációs erő

Két tömegpont közötti erő arányos a két tömeg szorzatával és fordítottan arányos a távolságuk négyzetével.

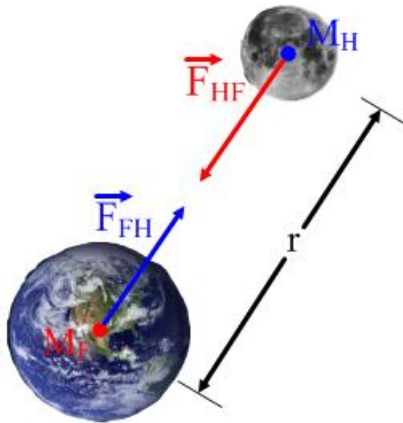
$$F = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}$$



A kölcsönhatás mindig vonzó.

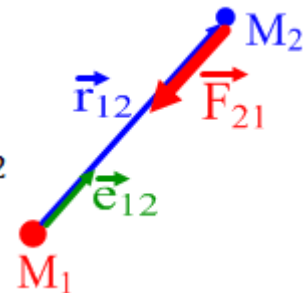
Az arányossági tényező az univerzális gravitációs állandó: $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

Az erőtvény egyszerű alakja kiterjedt testekre is
érvényes, amennyiben gömbszimmetrikusok.
A távolság a középpontok között mérendő.



A vektori alak megadja az
erő irányát is:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{\gamma M_1 M_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = -\frac{\gamma M_1 M_2}{r^2} \vec{e}_{12}$$



Súlyerő *

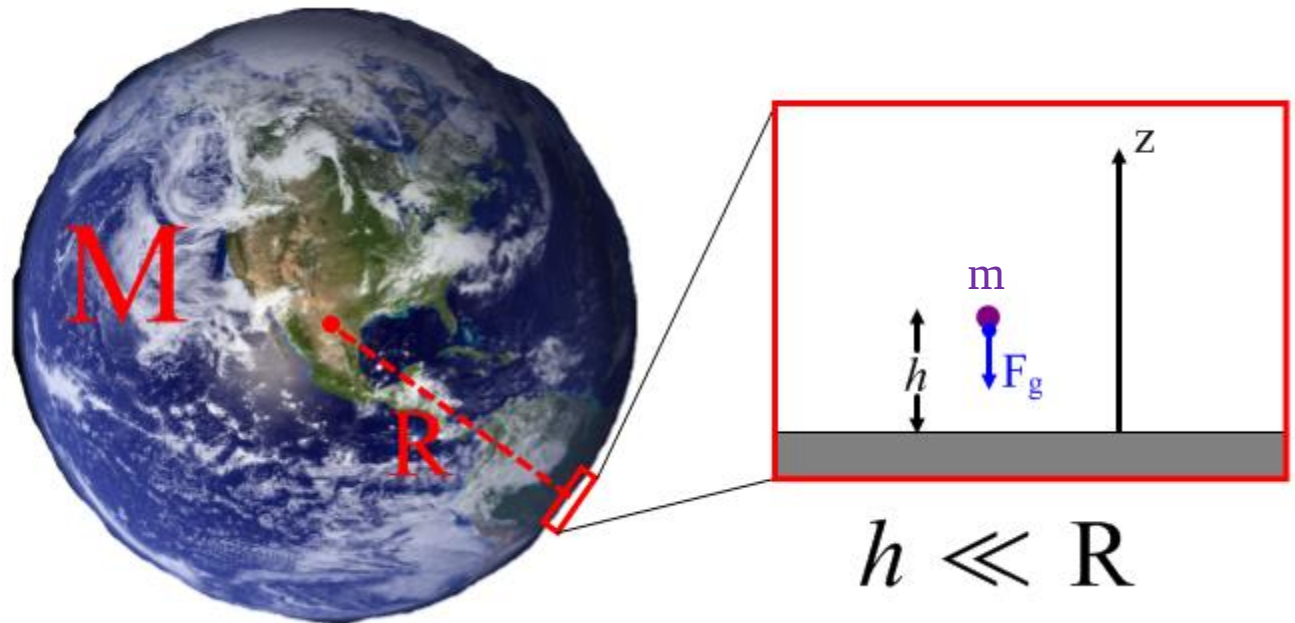
Amikor a test elmozdulása elhanyagolható méretű a bolygó (vagy hold stb.) sugarához képest, akkor a gravitációs erő homogénnek (helytől független) vehető.

Pl. a Földünk felszínének közelében végbemenő mozgásokra az általános Newton-féle erőtvényből kapjuk:

$$\vec{F}_g = -\frac{\gamma M m}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{\gamma M m}{(R + h)^2} \vec{e}_r \approx -\frac{\gamma M m}{R^2} \vec{e}_r = -mg \vec{k}$$

$$g = \frac{\gamma M}{R^2} = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

gravitációs gyorsulás
a Föld felszínén

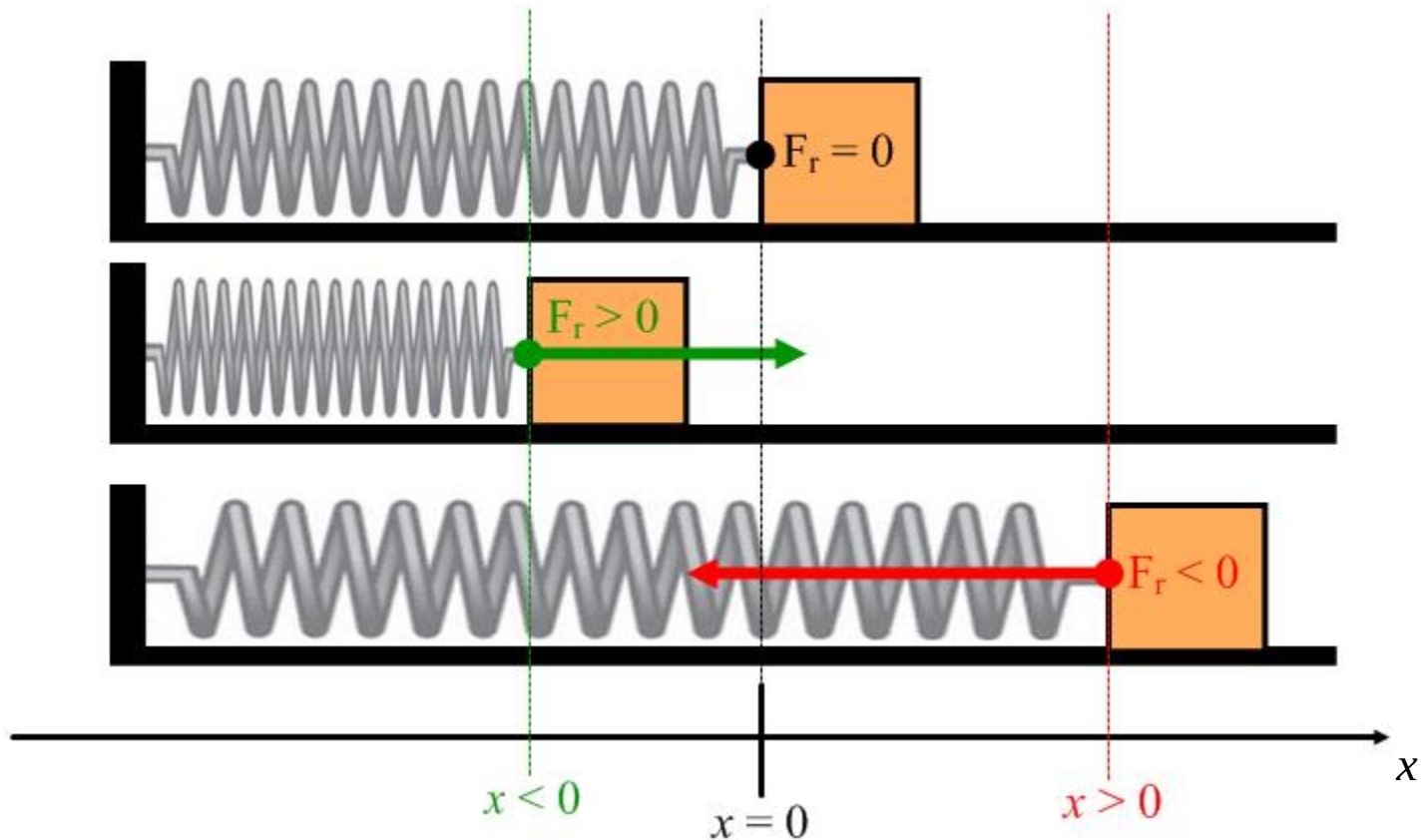


Rugóerő

Hooke-törvény: Az erő az egyensúlyi helyzettől mért deformáció méretével arányos és azzal ellentétes irányú.

Az arányossági tényező a rugóállandó D .

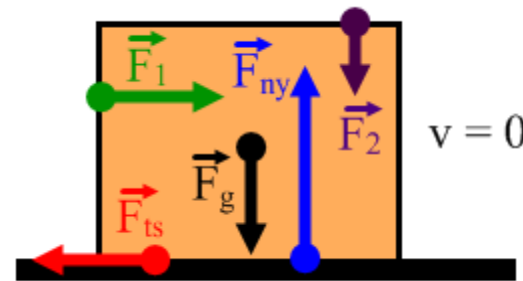
$$F_r = -Dx$$



Súrlódási erő

Három fajta lehet:

1. **tapadási**: A két felület egymáshoz képesti mozdulatlanságát igyekszik megőrizni. Értéke **bármekkora** lehet egy bizonyos **maximális** értékig (míg meg nem csúszik).

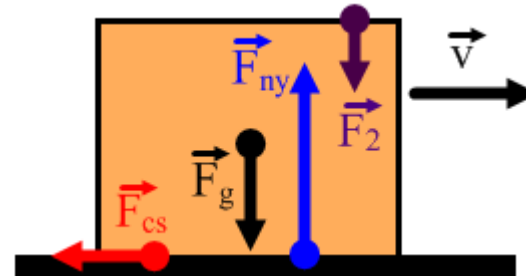


$$F_{ts} = F_1$$

amíg

$$F_1 \leq F_{ts,max}$$
$$F_{ts,max} = \mu_t F_{ny}$$

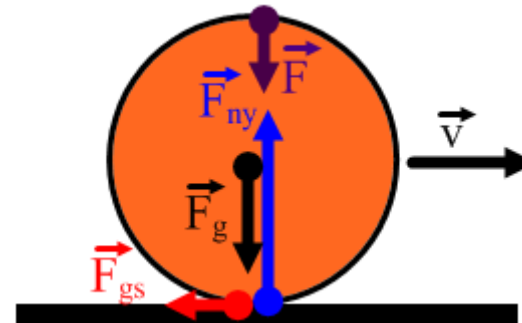
2. **csúszási**: Két egymáson csúszó felület között fellépő erő, mely a mozgást igyekszik gátolni. Csak az anyagi minőségtől (μ) és a felületeket összenyomó erőttől függ.



$\mu_t > \mu_{cs}$ mindig

$$F_{cs} = \mu_{cs} F_{ny}$$

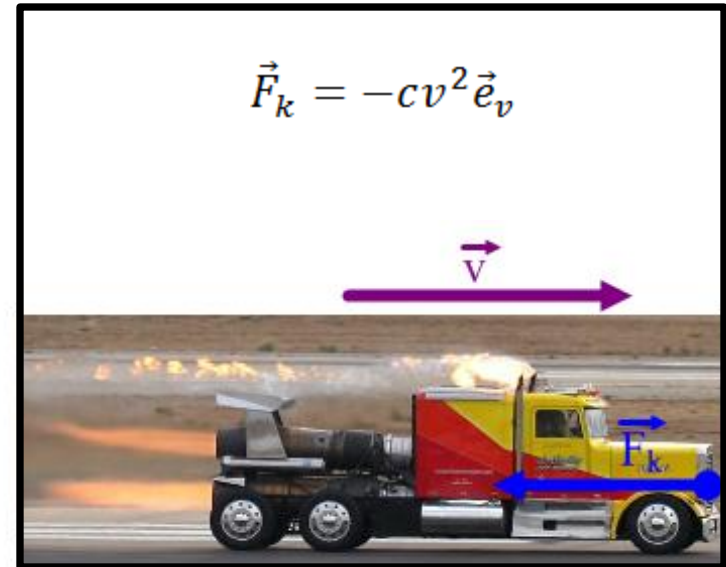
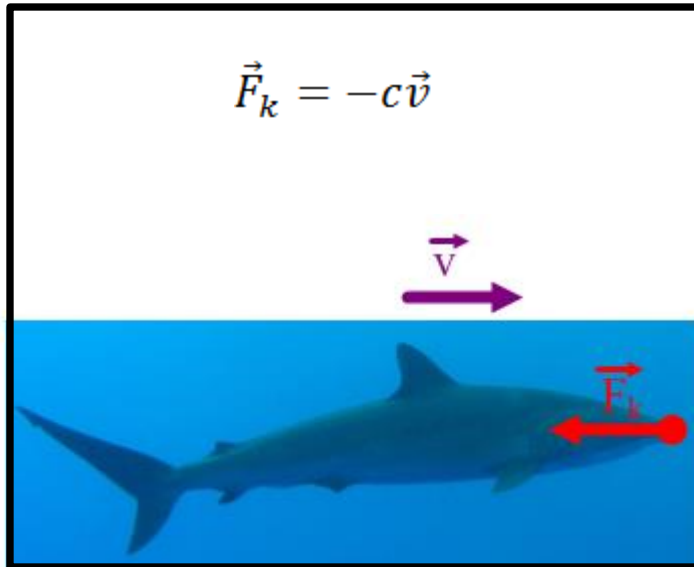
3. **gördülési**: Felületen guruló testre hat a mozgással ellenkező irányban. (pl. emiatt áll meg a guruló billiárd vagy teke golyó)



$$F_{gs} = \mu_g F_{ny}$$

Közegellenállás vagy légellenállás *

Arányos a test sebességével, ill. a sebesség négyzetével, és azzal ellentétes irányú.

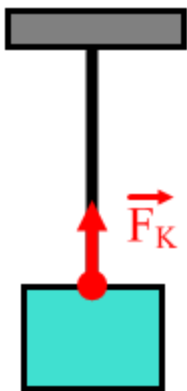


Az arányossági tényező c függ:

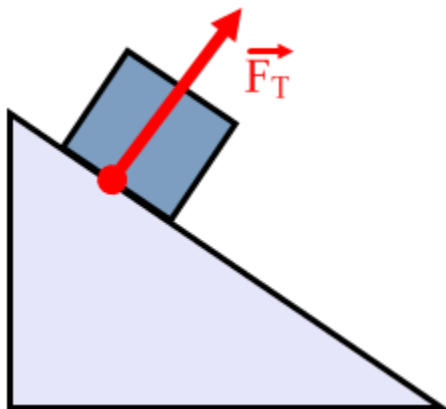
- a test mozgásra merőleges felületének nagyságától
- a test alakjától (mennyire áramvonalas)
- a közeg sűrűségétől

Kényszererők

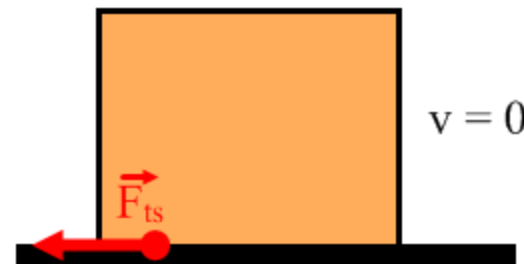
Ezek nagysága éppen akkora, hogy a **kényszerfeltétel** teljesüljön:
pl. kötélerő, tartóerő, tapadási súrlódás (a megcsúszás határáig)



kötél nem nyúlik



nem mehet bele a lejtőbe



ne csússzon meg

A dinamika alapegyenlete

Ha összegezzük Newton I., II., és IV. törvényét, akkor megkapjuk a **dinamika alapegyenletét**:

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Ezeket koordinátánként kiírva, illetve az erőkre beírva a megfelelő erőtvénnyeket, megkapjuk a **mozgásegyenleteket**. Pl. derékszögű Descartes koordinátarendszerben:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{ex}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} &= F_{ey}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} &= F_{ez}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{aligned} \right\} \text{ másodrendű, csatolt differenciálegyenletek}$$

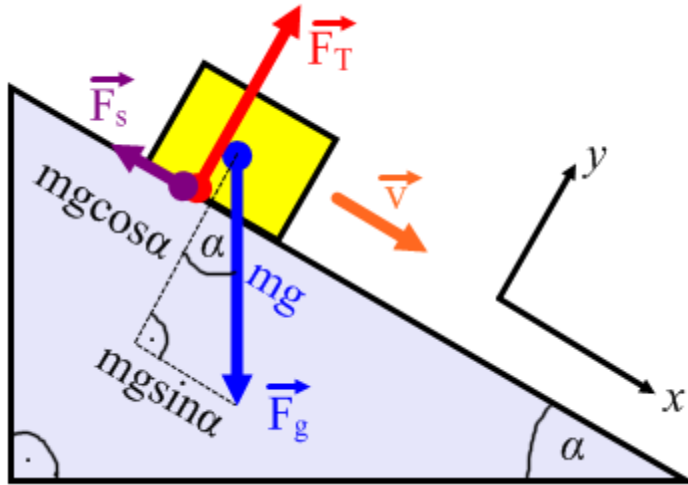
Az erők nem függhetnek a gyorsulástól, mert az ellentmondana a szuperpozíció elvének.

A megoldáshoz meg kell még adni 6 integrálási állandót. Ezek általában a **kezdeti hely** 3 koordinátája és a **kezdeti sebesség** 3 koordinátája: $\vec{r}_0$ és $\vec{v}_0$

Az egyenleteket megoldva megkapjuk a **mozgástörvényt**, mely megmondja, hogy a test hol tartózkodik egy bizonyos időben (a pálya egyenlete): $\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$

Példa: Lejtőn mozgó test *

Alkalmazva a dinamika alapegyenletét: $m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_g + \vec{F}_T + \vec{F}_s$



[ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!](#)

Célszerű párhuzamos és merőleges komponenseket vizsgálni, mert tudjuk, hogy az y irányú eredő erőnek zérusnak kell lennie:

$$\begin{aligned}(x) \quad m\ddot{x} &= ma_x = mgsin\alpha - F_s \\ (y) \quad m\ddot{y} &= ma_y = 0 = F_T - mg\cos\alpha\end{aligned}$$

Mivel a tartóerő egyben a nyomóerő is:

$$F_s = \mu mg\cos\alpha$$

Beírva az (x) egyenletbe a súrlódást:

Ha $a_x < 0$ jön ki megoldásnak: $\leftarrow$

- a lefelé csúszó test lassul

$$\begin{aligned}ma_x &= mgsin\alpha - \mu mg\cos\alpha \\ a_x &= g(sin\alpha - \mu\cos\alpha)\end{aligned}$$

Lejtőre helyezett test egyensúlyának feltétele:

- a nulla eredő erőhöz szükséges tapadási súrlódási erőnek kisebbnek kell lennie, mint a lehetséges maximális érték ($\mu_t F_T$)

Lendület

Lendület (impulzus): A test tömegének és sebességének szorzata.
vektormennyiség: iránya a sebesség vektor iránya.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Lendülettétele: A lendület erő hatására változik meg.
Az eredő erő határozza meg a változási gyorsaságát:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_e$$

Bizonyítás állandó tömeg esetén:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_e$$

Tehát ha az eredő erő zérus (magára hagyott test), akkor a lendület állandó.

Az okozott lendületváltozás t_1 és t_2 között az eredő erő által:

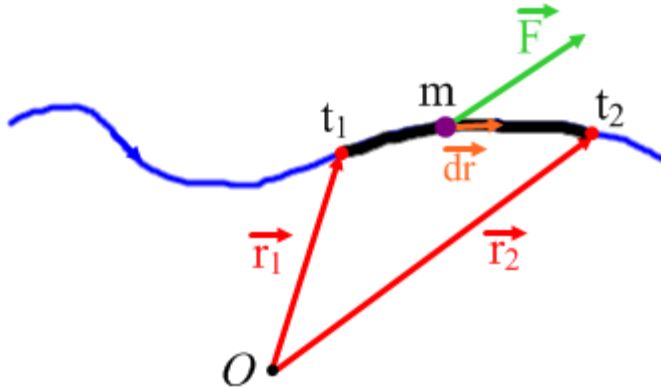
$$\Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_e dt$$

tömegtől független



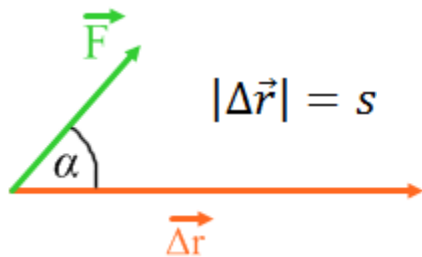
Munka

Munka: Az erő vonal menti (görbe menti) integrálja a test pályája mentén két pont között.



$$W_{1,2} = \int_{\vec{r}_1(g)}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Speciális eset: A mozgás pályája egyenes, az erő pedig mindenütt ugyanaz a vektor.



$$W = \int_g \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_g F \cos \alpha dr = F \cos \alpha \int_g dr = Fs \cos \alpha$$

Ha az erő végig a mozgás irányába mutat ($\alpha = 0$): $W = Fs$

Kinetikus (mozgási) energia

Ha egy nyugalomból induló tömegpontra állandó erő hat:

- a pont gyorsulása állandó: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ (a mozgás pályája egyenes vonalú) $\rightarrow a_x \rightarrow a$

- t idő múlva sebessége: $v = at$, a megtett út pedig: $s = x = \frac{a}{2}t^2$

Tehát a testen végzett munka: $W = Fs = ma \frac{a}{2}t^2 = \frac{1}{2}m(at)^2 = \frac{1}{2}mv^2$

Ez a test **kinetikus energiája**: $E_K = \frac{1}{2}mv^2$ (a munkavégzés során átadott energia)

Mértékegység mindkettő esetében: J (Joule)

Negatív munka esetén a kinetikus energia csökken, a test lassul.

Munkatétel: A kinetikus energia megváltozása egyenlő az eredő erő által a testen végzett összes munkával.

$$W = \Delta E_K$$



Teljesítmény

Teljesítmény: Az energiaközlés üteme (egységnyi idő alatt közölt energia).

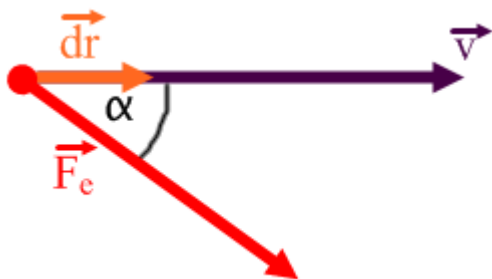
$$P = \frac{dE}{dt} \quad (\text{lehet közölt hőenergia, elektromos energia, mechanikában a munkavégzés során közölt energia})$$

A mechanikai **teljesítménytétel:** A tömegpontra ható erők teljesítménye egyenlő a test kinetikus energiájának változási gyorsaságával:

$$P = \frac{dE_K}{dt}$$

Az elemi munka: $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dE_K$

A munkatétel felhasználásával: $P = \frac{dE_K}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$



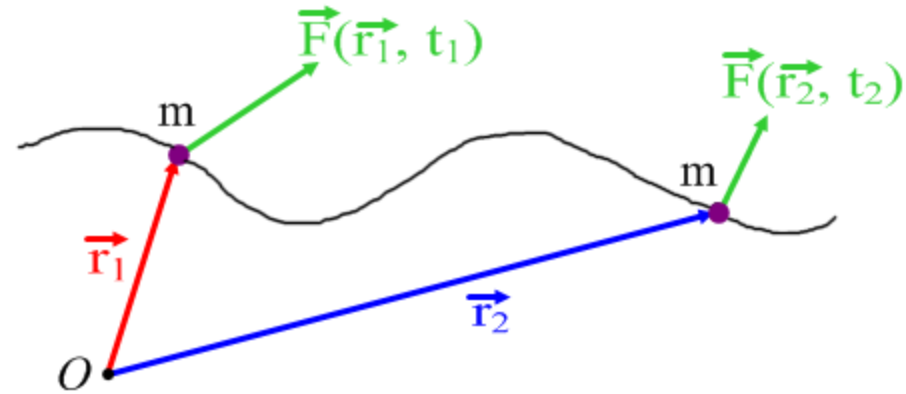
Végrehajtva egy változótranszformációt:

$$W_{1,2} = \int_{\vec{r}_{1,g}}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} P dt$$

Fizikai mező (erőtér)

Fizikai mező: Fizikai mezőről akkor beszélünk, ha a tér valamely tartományában és valamely időközben, az akkor és ott jelenlévő tömegpontra erő hat és ez a helykoordináták és az idő folytonosan differenciálható függvénye.

Tehát az $\vec{r}$ és t az erő vektorfüggvény változói: $\vec{F}(\vec{r}, t)$



- Az erőter lehet időtől független (**stacionárius**), tehát $\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = 0$.

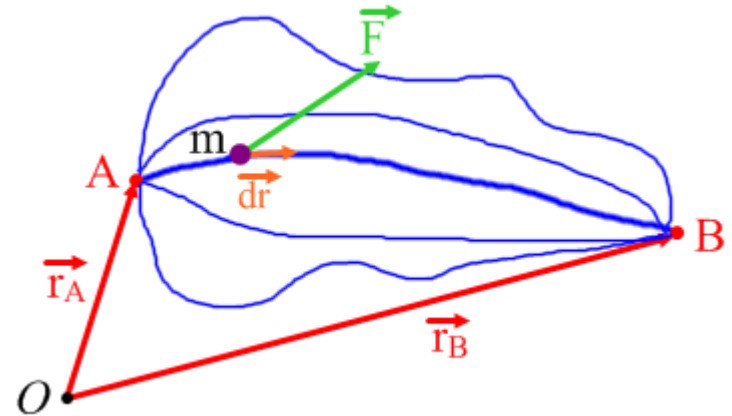
Ekkor az erő csak a helytől függ: $\vec{F}(\vec{r})$

- Az erőter lehet helytől független (**homogén**), tehát $\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} = 0$

Ekkor az erő csak az időtől függ: $\vec{F}(t)$

Konzervatív erőterek

Konzervatív erőter: Olyan időtől független erőter amelyben két pont között az erőter által végzett munka független az útvonaltól, kizárólag a kezdő- és végponttól függ (ez ekvivalens azzal, hogy bármely zárt görbére a munka nulla).

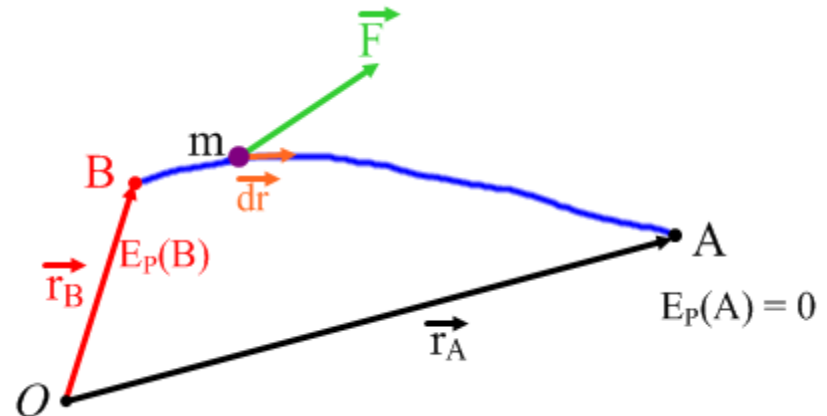


Ekkor a pontokat (pl. B) jellemezhetjük a munkával amit a tér végez amíg onnan a test egy kiválasztott nullpontba (pl. A) mozdul.

Potenciális (helyzeti) energia:

A potenciális energia egy pontban (B) egyenlő azzal a munkával amit a **tér** végez miközben a test onnan a nullpontba (A) mozdul.

$$E_P(B) = W_{BA} = \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Példa: súlyerő munkája *

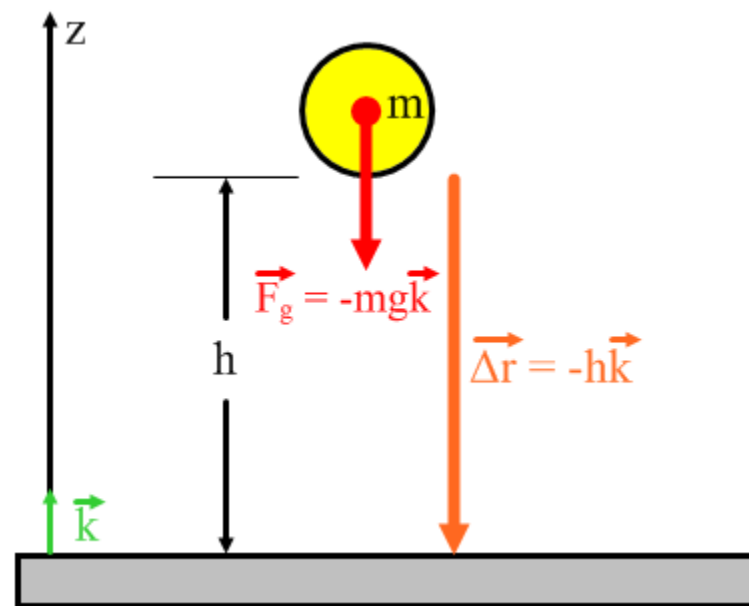
Legyen a padló szintje a potenciális energia nullpontja, és ejtsünk le egy $F_g = 20\text{N}$ súlyú testet 80m magasról.

Ekkor a súlyerő munkája (vagyis a potenciális energia 80m magasan):

$$\begin{aligned} E_P(h) &= W_{h0} = \int_{h\vec{k}}^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{h\vec{k}}^0 (-mg\vec{k}) \cdot (dz\vec{k}) = \\ &= \int_h^0 -mg \, dz = -mg[z]_h^0 = mgh \end{aligned}$$

Természetesen ebben az egyszerű esetben használható a $W = Fs$ képlet is, tehát a $W = (mg)h = mgh$ egyből látható.

vagyis esetünkben: $W = (20\text{N})(80\text{m}) = 1600\text{J}$



Az energiaminimum elve

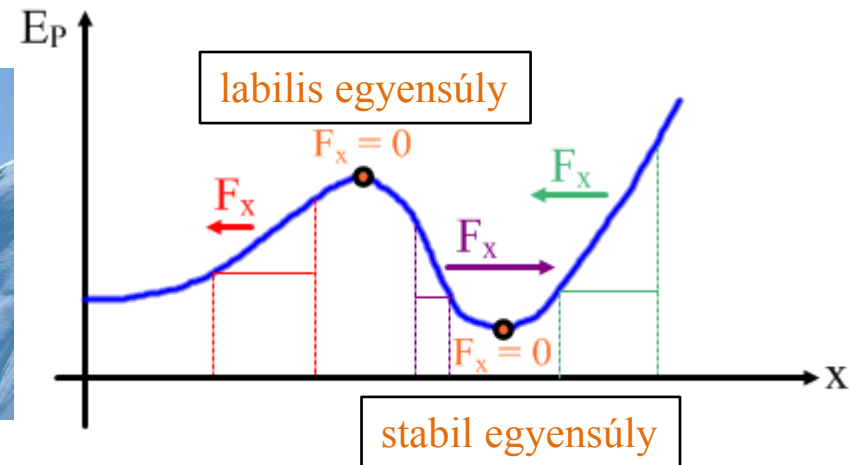
Nagyobb erő nagyobb potenciális energiakülönbséget jelent ugyanazon két pont között.
Megfordítva: Minél nagyobb ütemben változik a potenciális energia a hely változásával, annál nagyobb a **tér által** kifejtett erő.

Általánosan egy tetszőleges pontban egy dimenzióban: $F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x}$

Energiaminimum elve: Az erő a csökkenő potenciális energia irányába hat (negatív jel).

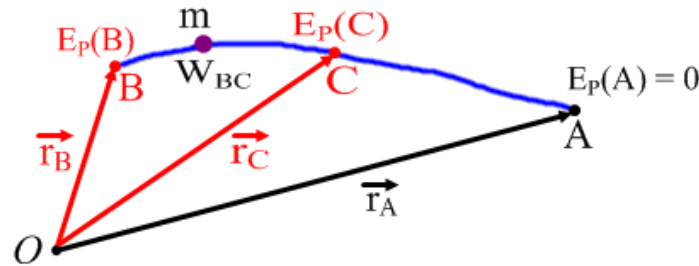
Három dimenzióban:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = \\ &= -\frac{\partial E_P}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial E_P}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial E_P}{\partial z} \vec{k} = \\ &= -\nabla E_P = -\text{grad} E_P\end{aligned}$$



Mechanikai energia

Vegyük azt a speciális esetet **amikor csak konzervatív erők hatnak** miközben a test B -ből C -be mozdul.



Ekkor bármely B és C pontokra: $E_p(B) - E_p(C) = W_{BC} = E_K(C) - E_K(B)$

$$-\Delta E_p = W_{BC} = \Delta E_K$$

Az eredeti egyenletet átrendezve: $E_p(B) + E_K(B) = E_p(C) + E_K(C)$

A potenciális és a kinetikus energia összege **minden pontban megegyezik**.

Vezessük be a **mechanikai energiát**, mely a kinetikus és potenciális energiák összege:

$$E_M = E_p + E_K$$

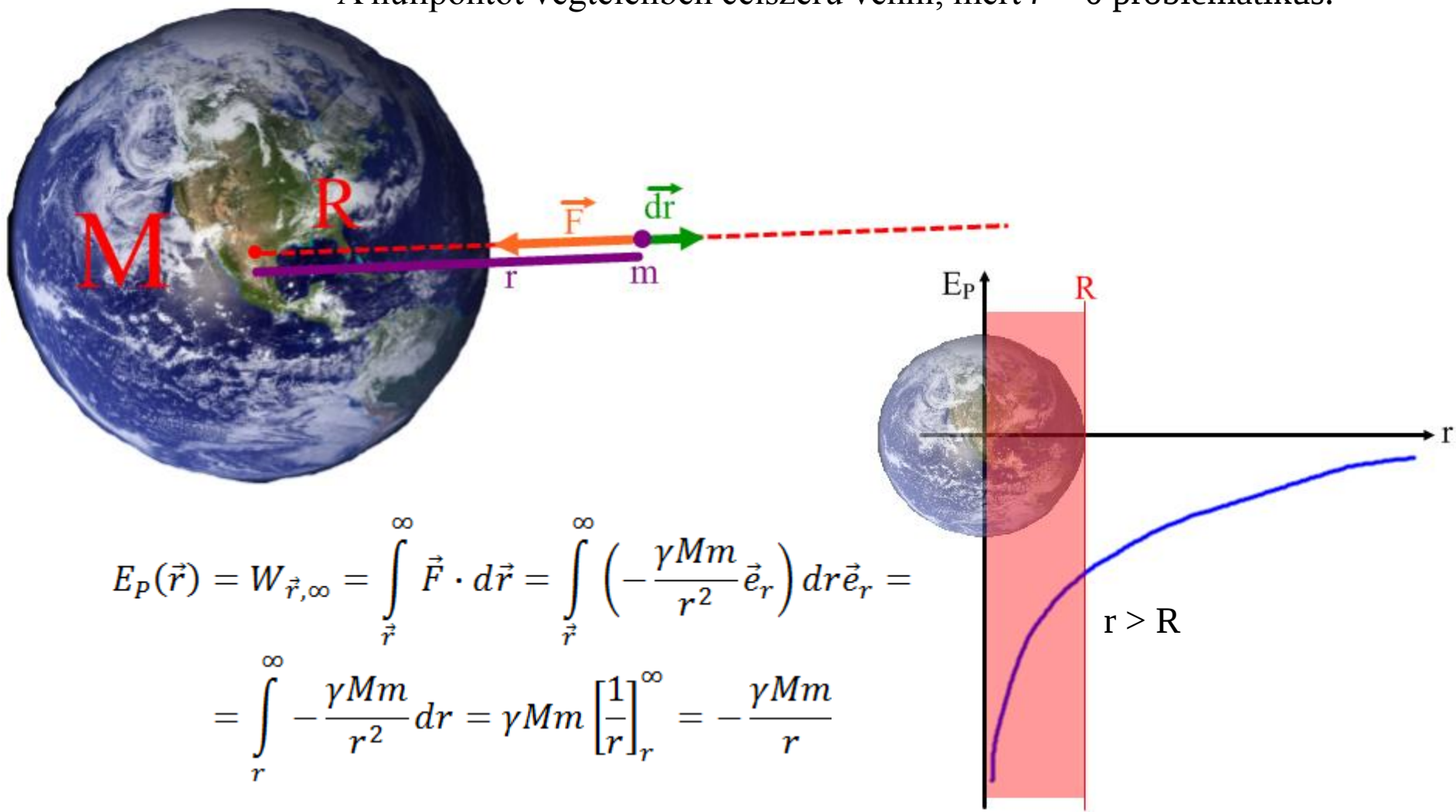
Ez a mechanikai energia konzervatív erőterben megmarad: $E_M(B) = E_M(C)$

Példák konzervatív erőterekre

Potenciális energia Newton-féle gravitációs mezőben *

Legyen a M tömegű test rögzítve, és tőle r távolságban kiszámoljuk a m tömegű test potenciális energiáját. Az erő sugárirányú, ezért célszerű sugárirányú pályát venni.

A nullpontot végtelenben célszerű venni, mert $r = 0$ problematikus.



$$\begin{aligned} E_P(\vec{r}) &= W_{\vec{r}, \infty} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \left(-\frac{\gamma M m}{r^2} \vec{e}_r \right) dr \vec{e}_r = \\ &= \int_r^{\infty} -\frac{\gamma M m}{r^2} dr = \gamma M m \left[\frac{1}{r} \right]_r^{\infty} = -\frac{\gamma M m}{r} \end{aligned}$$

Rugóerő potenciális energiája*

A Hooke-törvény értelmében az erő lineáris függvénye a hosszváltozásnak.
Ez konzervatív erőteret eredményez.

Az x hosszal megnyújtott rúgó potenciális energiája:

$$\begin{aligned} E_P(x) &= W_{\vec{r},0} = \int_{\vec{r}}^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^0 (-Dx\vec{i}) dx\vec{i} = \\ &= \int_x^0 -Dx dx = -D \left[\frac{x^2}{2} \right]_x^0 = \frac{1}{2} Dx^2 \end{aligned}$$

