

# Kinematika

A mozgás matematikai leírása, a mozgást kiváltó ok feltárása nélkül.

# Helyvektor és elmozdulás

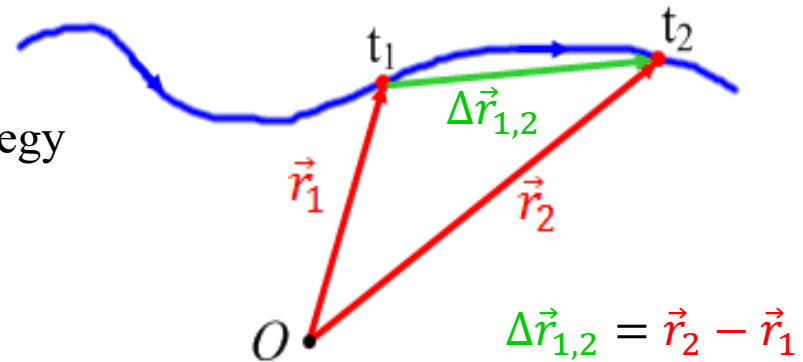
Egy test helyzetét és helyzetváltozását csak más testekhez viszonyítva írhatjuk le. Ezért először választani kell egy vonatkoztatási rendszert:

Egy test (pontszerű) helyzetét a  $t$  időpillanatban egy  $\vec{r}(t)$  **helyvektorral** jellemezzük, ami a vonatkoztatási rendszer origójából a testhez mutat.

A test mozgása során a térben kijelöli a **pályagörbét**.

Az **elmozdulás** a helyvektor megváltozása egy eltelt  $\Delta t$  idő alatt (itt  $\Delta t = t_2 - t_1$ ).

$$\Delta\vec{r}_{1,2} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$



# Sebesség

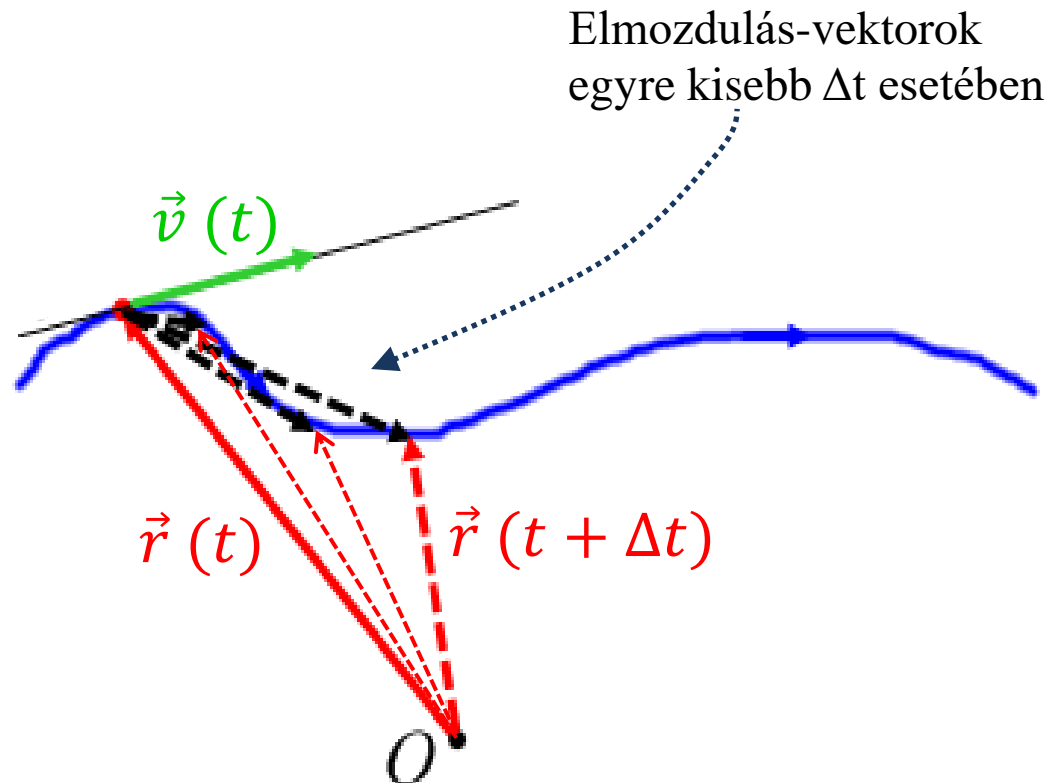
A **sebesség** azt jellemzi milyen gyorsan változik a helyvektor.

**FONTOS:** a sebesség vektormennyiség, iránya és nagysága is számít!

Ha a sebesség iránya és/vagy nagysága változik (általában igen), akkor pontos értéket csak kis  $\Delta t$  időre kaphatunk.

Teljesen pontos, ha  $\Delta t \rightarrow 0$ .

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



# Gyorsulás

A **gyorsulás** a sebességvektor változási gyorsasága:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

**FONTOS:** gyorsulás akkor is van ha csak a sebesség iránya változik. Pl. kanyarodás

Ha a gyorsulás, mint az idő függvénye, valamint a kezdeti hely  $\vec{r}_0$  és a kezdeti sebesség  $\vec{v}_0$  ismert, akkor a mozgás pályája meghatározható:

Első lépés a sebesség idő függvény meghatározása:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \vec{a} dt = d\vec{v}$$

Bármely  $t_1$  időpontban a sebesség:  $\vec{v}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t) dt + \vec{v}(t_0)$  A végén a  $t_1$  paraméter helyett simán  $t$ -t írunk, és megvan a  $\vec{v}(t)$

A sebességfüggvény ismeretében a helyvektor bármely  $t_1$  időpontban hasonlóképpen meghatározható:

$$\vec{r}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t) dt + \vec{r}(t_0)$$

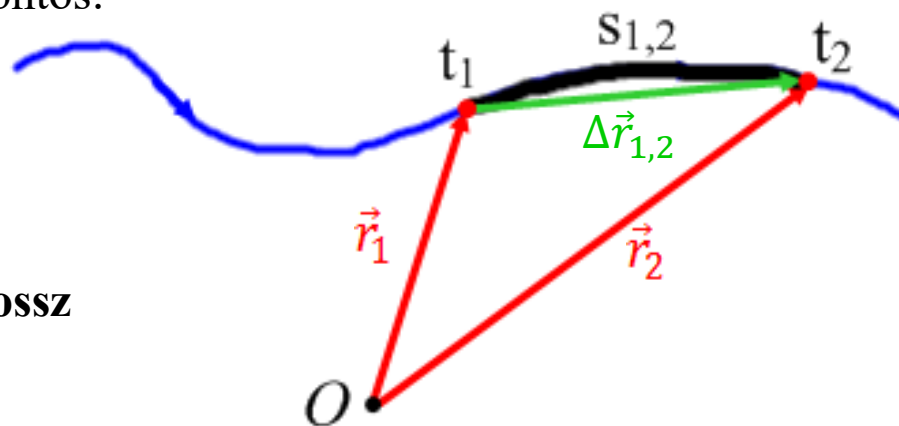
A végén a  $t_1$  paraméter helyett simán  $t$ -t írunk, és megvan az  $\vec{r}(t)$  függvényünk.

# Úthossz és átlagsebesség

Egy adott idő alatt megtett **úthossz** a közben befutott pályagörbe hosszát jelenti. Ez már csak egy skalár mennyiség.

Számításánál csak a sebesség nagysága fontos:

$$s_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)| dt$$



Az ábra szemlélteti a különbséget az **úthossz** és az **elmozdulás(vektor)** között!

Az **átlagsebesség** (skalár) az a sebességnagyság amivel egyenletesen haladva ugyanazt a hosszúságú utat tenné meg a test ugyanakkora idő alatt:

Nem vektor jel,  
csak egy vonás!

$$\bar{v} = \frac{s_{1,2}}{t_2 - t_1}$$

# Derékszögű Descartes koordináta rendszer

Segítségével a pálya egyenlete:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Az  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  függvények a **koordináták**.

Az  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  egységvektorok a **bázisvektorok**.

Pitagorasz tételével:  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

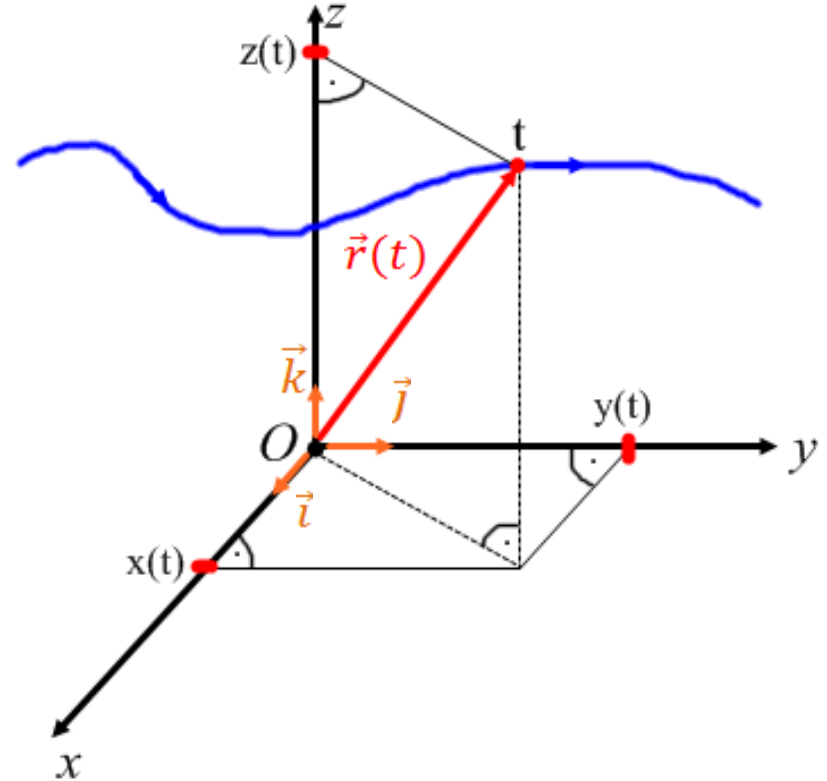
A sebesség:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

A sebesség nagysága:  $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

A gyorsulás és nagysága:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \quad a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$



## Példa: Egyenes vonalú egyenletes mozgás \*

A mozgás 1 dimenziós, ezért elég egy koordináta ha a mozgás irányába vesszük fel azt az egy tengelyt (pl.  $x$ ).

Ebben az egyszerű esetben:

$$v_x = v \quad \Delta x = s$$

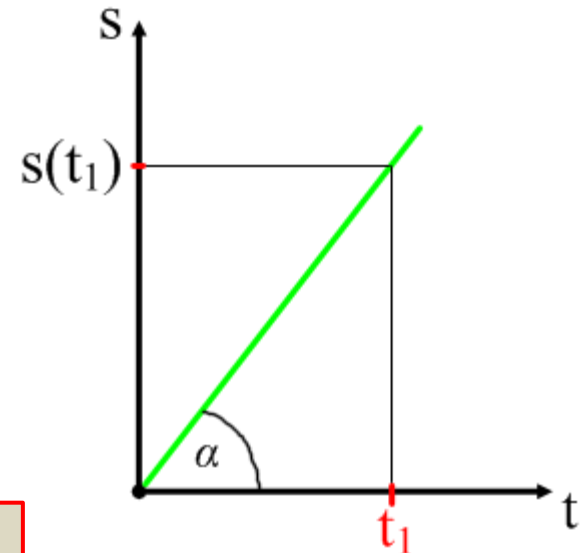
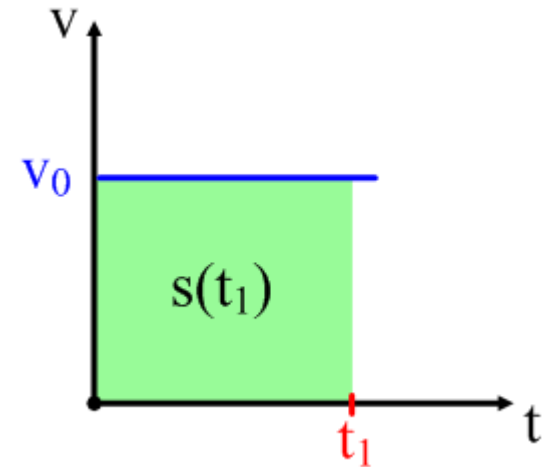
$$s(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} |\vec{v}(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} v dt = v \int_{t_0}^{t_1} dt = v\Delta t$$

Tehát ha  $t_0 = 0$ , akkor visszkapjuk az  $s = vt$  képletet.

A megtett út a sebesség-idő grafikon alatti terület.

Tehát az úthossz lineáris függvénye az időnek, a meredekség pedig a sebesség:

$$\tan \alpha = v = \frac{s}{t}$$



**Példa: 1**

# Példa: Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás

Ha a kezdősebesség vektor és a gyorsulás vektor egy egyenesbe esik, akkor a test annak az egyenesnek a mentén fog mozogni (ismét elég egy koordináta, pl.  $z$ ):

tehát a test a  $z$  tengely irányában halad állandó  $a_z$  gyorsulással, és időtől függő  $v_z$  sebességgel (ezek a komponensek lehetnek negatívak is!). A többi komponens ( $x, y$ ) nulla. A sebesség egy  $t_1$  időpontban:

$$v_z(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} a_z(t) dt + v_z(t_0) = a_z(t_1 - t_0) + v_z(t_0)$$

legyen  $t_0 = 0$   
 $v_z(t_0) = v_{z0}$

Ezekkel:  $v_z(t) = a_z t + v_{z0}$

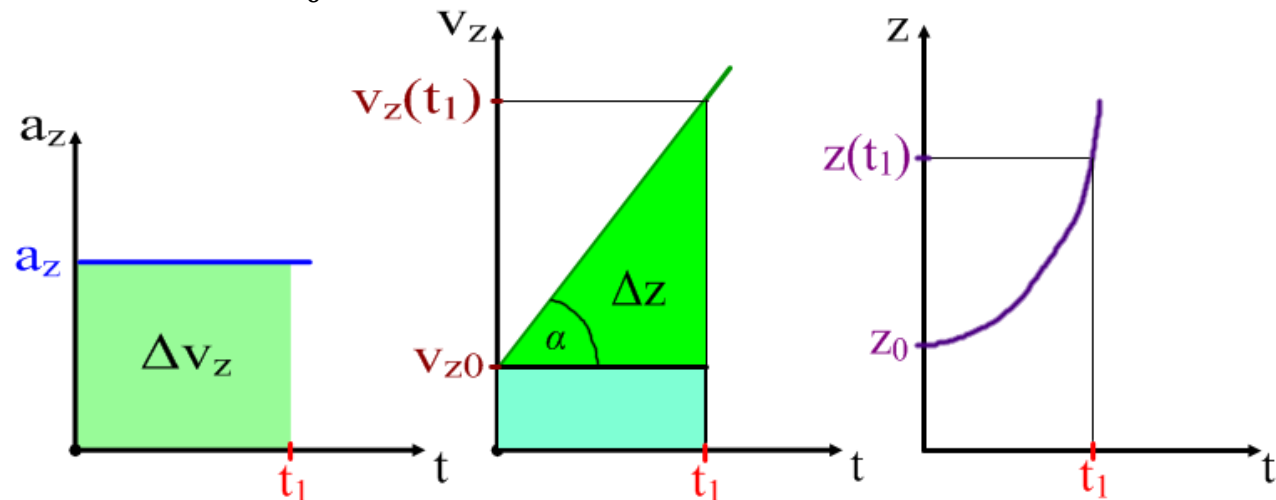
A test helye:  $z(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} v_z(t) dt + z(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} (a_z t + v_{z0}) dt + z(t_0)$  ( $\Delta v_z = a_z \Delta t$ )

legyen  $z(t_0) = z_0$

Tehát ha  $t_0 = 0$  továbbra is:

$$z(t) = \frac{1}{2} a_z t^2 + v_{z0} t + z_0$$

**Példa: 2**





## Példa: Ferde hajítás

A gyorsulás állandó ( $g$ ), de nem esik egybe a kezdősebesség vektor irányával:

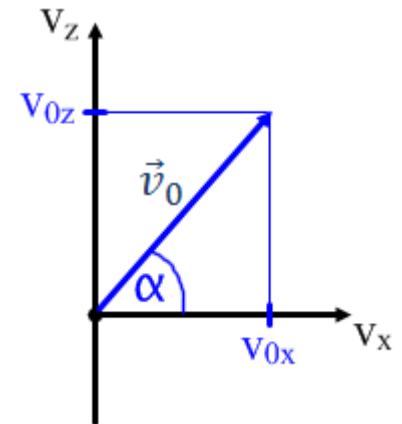
A kezdeti sebesség felbontása (2D – x és z):

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha \quad v_{0z} = v_0 \sin \alpha$$

A gyorsulás:  $\vec{a} = -g\vec{k}$

A sebesség-idő függvény:  $\vec{v}(t) = v_{0x}\vec{i} + 0\vec{j} + (-gt + v_{0z})\vec{k}$

A helyvektor:  $\vec{r}(t) = v_{0x}t\vec{i} + 0\vec{j} + \left(-\frac{g}{2}t^2 + v_{0z}t\right)\vec{k}$



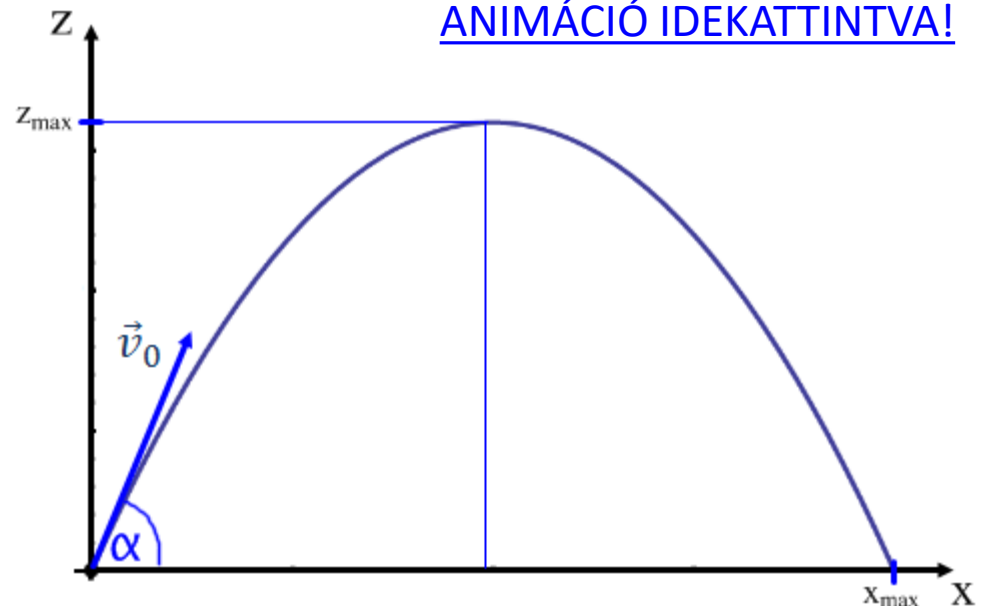
A test földet ér amikor  $z = 0$ :

$$-\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin \alpha t = 0$$

Megoldva az időre:  $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$

Behelyettesítve az  $x$  koordinátára megkapjuk a hajítás távolságát:

$$x_{max} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$



# Síkbeli polár koordináta rendszer

A két koordináta: egy ponttól mért távolság és egy iránytól mért szög.  
Körmozgás leírására jól használható, ha az origó a kör középpontjában van.

Pitagorasz tételével és a tangens definíciójából:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

A koordinátákat a másik irányba kifejezve:

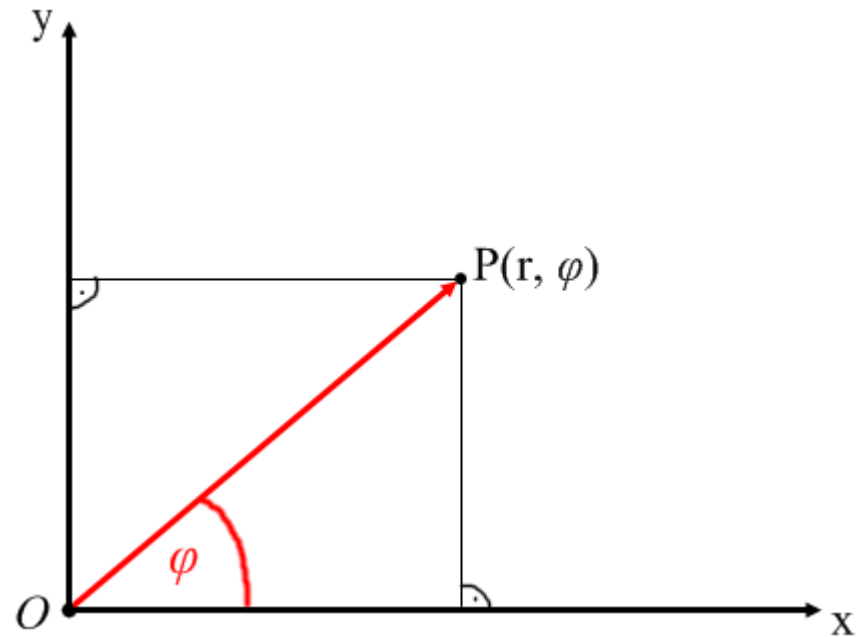
$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

A  $\varphi$  szög változási gyorsasága adja a **szögsebességet** (mértékegysége: 1/s):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

A szögsebesség változási gyorsasága pedig a **szöggyorsulás** (mértékegysége: 1/s<sup>2</sup>):

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$



**SEBESSÉG ÉS GYORSULÁS  
SÍKBELI POLÁR KOORDINÁTÁKKAL:  
[VIDÉÓ IDEKATTINTVA!](#)**

## Példa: Egyenletes körmozgás

A szögsebesség állandó:  $\omega = \text{áll.} = \frac{2\pi}{T}$   $\beta = 0$   
(ahol  $T$  a periódusidő)

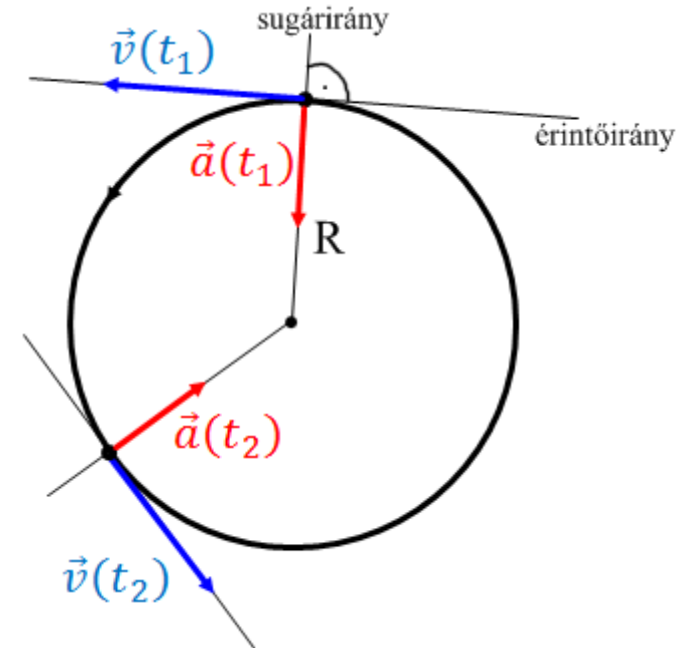
A  $T$  idő alatt megtett út tehát a kör kerülete:  $s(T) = 2R\pi$

A mozgás sebességének nagysága (kerületi sebesség) is állandó (az iránya viszont nem!):

$$v = \frac{s(T)}{T} = \frac{2\pi R}{T} = R\omega$$

Mivel a sebesség iránya folyamatosan változik, a gyorsulás nem nulla. Nagysága állandó, iránya pedig mindig a középpont felé mutat (centripetális):

$$a = a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2$$



[ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!](#)

# Példa: Egyenletesen változó körmozgás

A szöggyorsulás  $\beta = \text{állandó}$ , és emiatt a szögsebesség lineárisan változik:

$$\omega(t) = \beta t + \omega_0$$

Az állandó szöggyorsulás miatt a gyorsulásnak lesz egy állandó nagyságú érintőirányú (tangenciális) komponense. Emiatt a sebesség nagysága egyenletesen változik:

$$a_t = \beta R = \frac{dv}{dt}$$

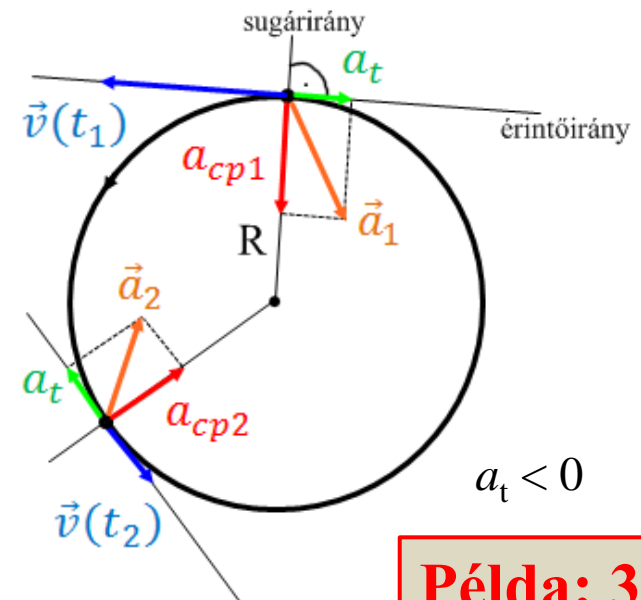
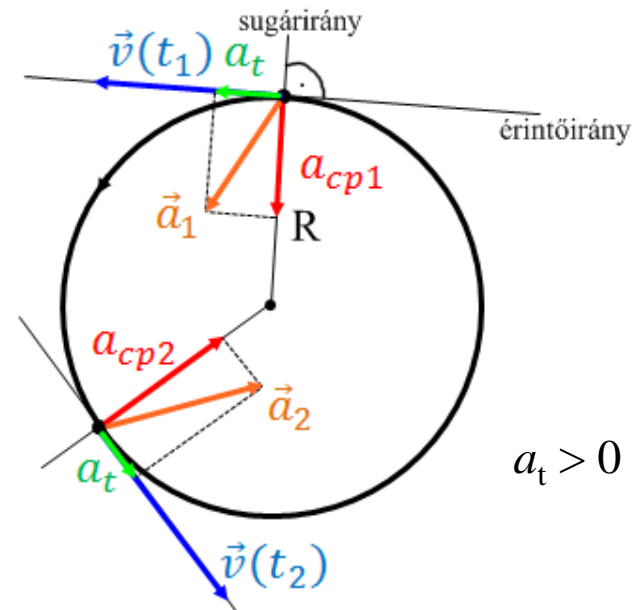
A gyorsulás nagysága Pitagorasz tételéből:

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}$$

A megtett út csak a tangenciális gyorsulás komponensből függ (a másik komponens csak az irányt változtatja):

$$s(t) = \frac{1}{2} a_t t^2 + v_0 t$$

[ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!](#)



**Példa: 3**

# Dinamika

A dinamika feladata a test(ek) gyorsulását okozó erők matematikai leírása.

Az erők kölcsönhatások során lépnek fel.

Ezek a kölcsönhatások lehetnek:

- test és test között
- mező(erőtér) és test között

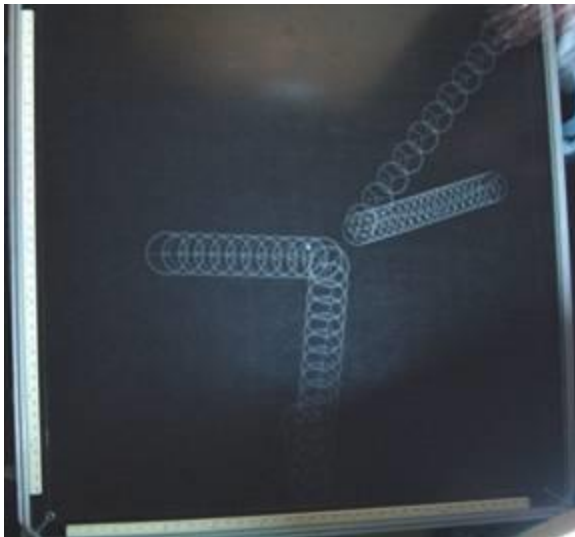
A magára hagyott test egy olyan test, amely nem áll kölcsönhatásban sem más testtel, sem pedig mezővel.

# Newton törvényei: I.

**Newton I. törvénye**: Minden nyugalomban lévő test megtartja nyugalmi állapotát, minden mozgó test pedig egyenes vonalú egyenletes mozgását mindaddig, amíg egy másik test vagy mező annak megváltoztatására nem kényszeríti.

ugyanaz kicsit pontosabban megfogalmazva:

**Kiválasztási axióma**: Létezik olyan vonatkoztatási rendszer amelyben a magára hagyott testek megtartják eredeti mozgásállapotukat (azaz a sebesség vektor állandó). Az ilyen rendszereket **inerciarendszereknek** nevezzük.



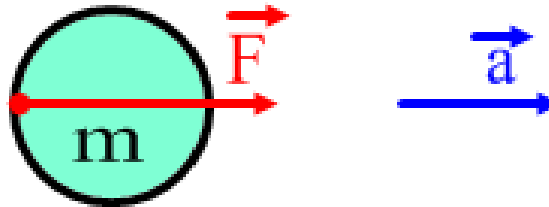
A légpárnás asztalon mozgó korong jó közelítéssel egy magára hagyott testnek számít. Mozgása az asztalhoz (Föld felszínéhez) képest jó közelítéssel egyenes vonalú egyenletes, tehát a Föld felszínéhez rögzített rendszer jó közelítéssel (mindennapi élet történéseire) inerciarendszer.

## Newton törvényei: II.

Ha egy pontszerű testre erő hat az megváltoztatja annak mozgásállapotát (a sebesség vektort). Ekkor a test gyorsul (a gyorsulás vektor nem nulla).

**Newton II. törvénye:** Egy állandó tömegű pontszerű test gyorsulása arányos a testre ható erővel és ellentétesen arányos a test tömegével. A gyorsulás a testre ható erő irányába mutat.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$



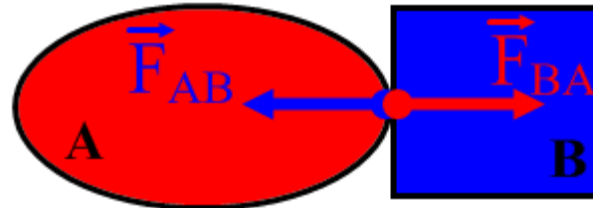
# Newton törvényei: III.

**Newton III. törvénye:** (Hatás-ellenhatás törvénye)

Ha az  $A$  test a  $B$  testre  $\vec{F}_{BA}$  erőt fejt ki, akkor a  $B$  test is erőt fejt ki az  $A$  testre.

Ez az  $\vec{F}_{AB}$  erő azonos nagyságú, de ellentétes irányú az  $\vec{F}_{BA}$  erővel.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$



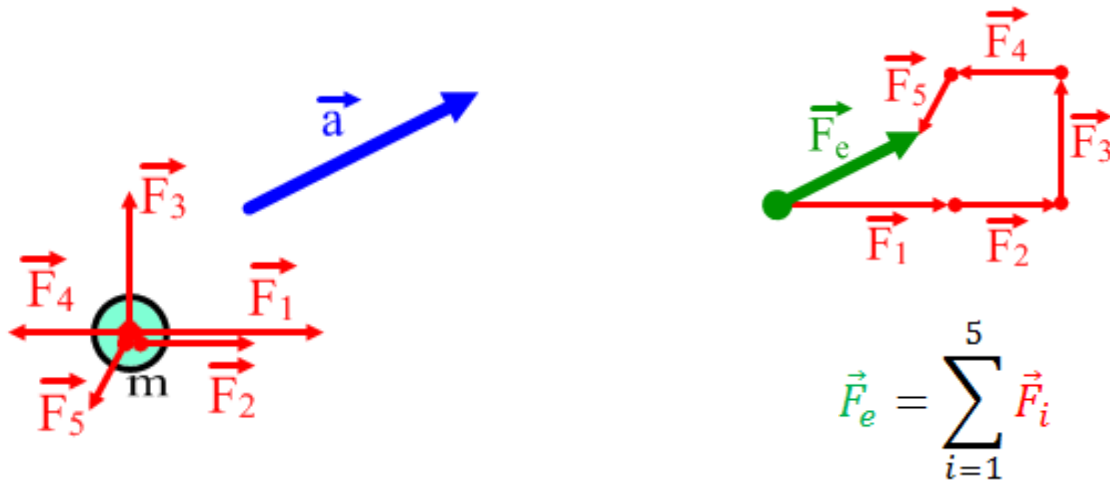


# Newton törvényei: IV.

## Newton IV. törvénye: (A szuperpozíció elve)

Ha egy tömegpont egyidejűleg több erőhatásnak is ki van téve, akkor azok együttes hatása egy eredő erővel helyettesíthető. Az eredő erő a testre ható összes erő vektori összege:

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}_e}{m}$$



# Erőtörvények

Olyan függvények, amelyek matematikai alakban megadják a testre ható erőket.

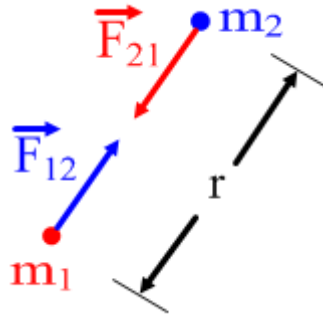
Ezeknek a függvényeknek a változói lehetnek:

- a test helye
- a test sebessége
- az idő

# Newton-féle gravitációs erő

Két tömegpont közötti erő arányos a két tömeg szorzatával és fordítottan arányos a távolságuk négyzetével.

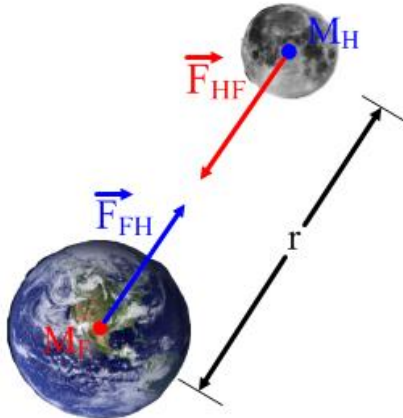
$$F = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}$$



A kölcsönhatás mindig vonzó.

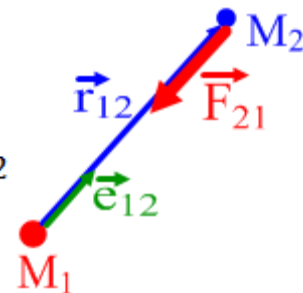
Az arányossági tényező az univerzális gravitációs állandó:  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

Az erőtvény egyszerű alakja kiterjedt testekre is érvényes, amennyiben gömbszimmetrikusok. A távolság a középpontok között mérendő.



A vektori alak megadja az erő irányát is:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{\gamma M_1 M_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = -\frac{\gamma M_1 M_2}{r^2} \vec{e}_{12}$$



# Súlyerő \*

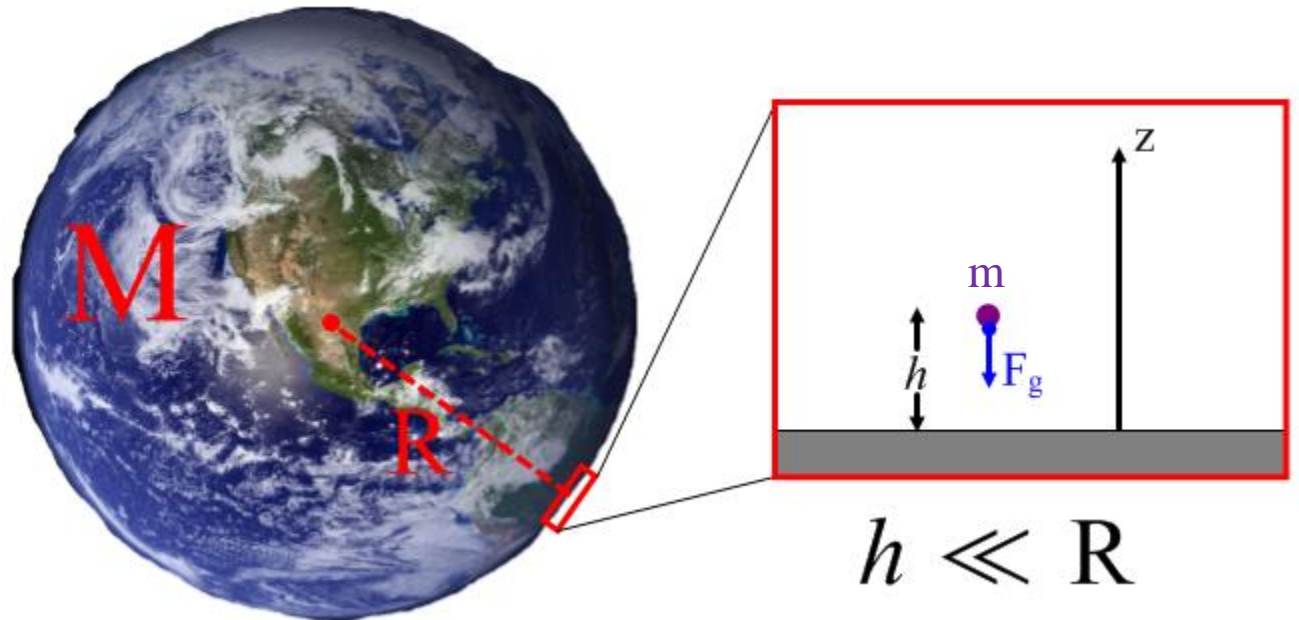
Amikor a test elmozdulása elhanyagolható méretű a bolygó (vagy hold stb.) sugarához képest, akkor a gravitációs erő homogénnek (helytől független) vehető.

Pl. a Földünk felszínének közelében végbemenő mozgásokra az általános Newton-féle erőtvényből kapjuk:

$$\vec{F}_g = -\frac{\gamma M m}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{\gamma M m}{(R+h)^2} \vec{e}_r \approx -\frac{\gamma M m}{R^2} \vec{e}_r = -mg \vec{k}$$

$$g = \frac{\gamma M}{R^2} = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

gravitációs gyorsulás  
a Föld felszínén

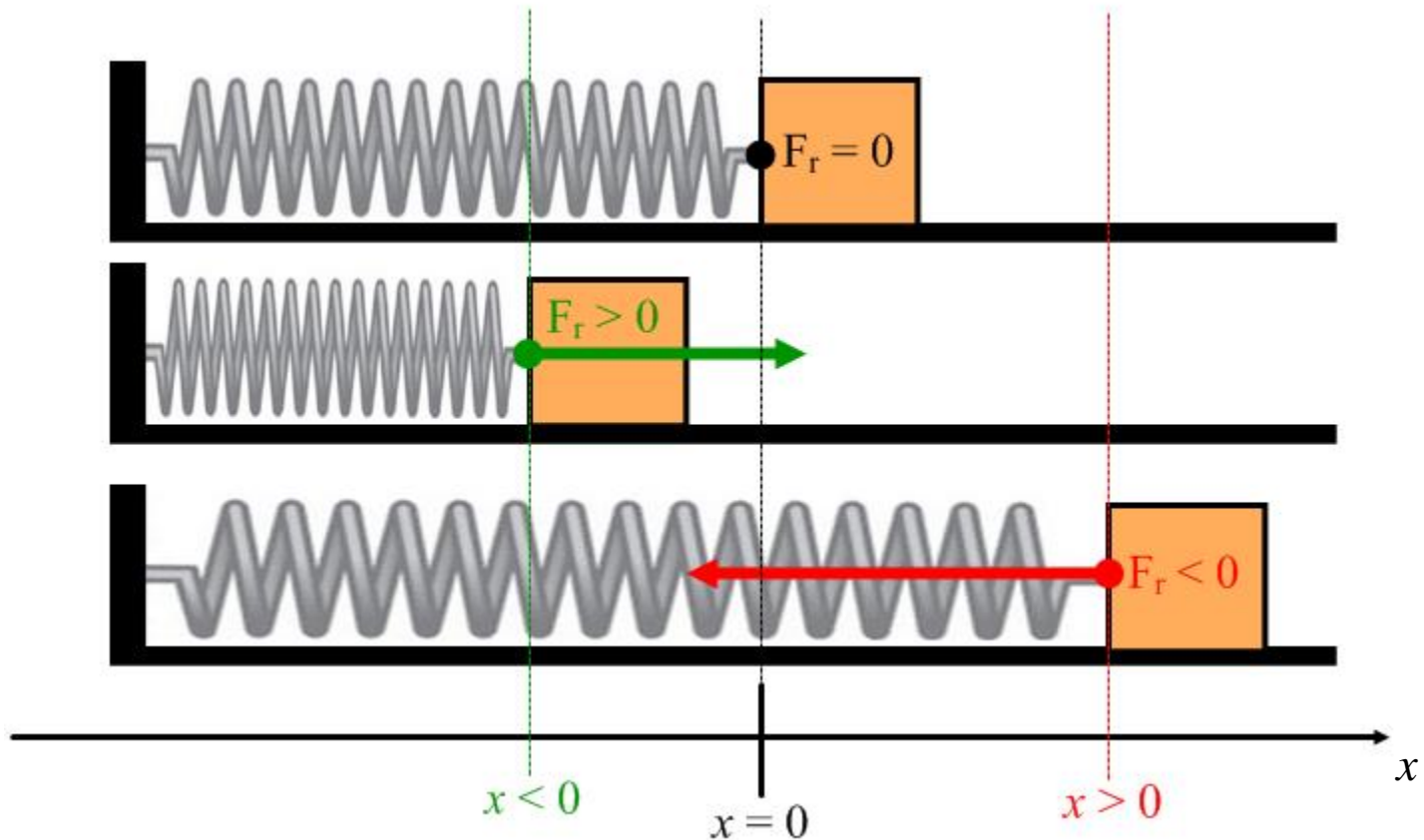


# Rugóerő

**Hooke-törvény:** Az erő az egyensúlyi helyzettől mért deformáció méretével arányos és azzal ellentétes irányú.

Az arányossági tényező a rugóállandó  $D$ .

$$F_r = -Dx$$

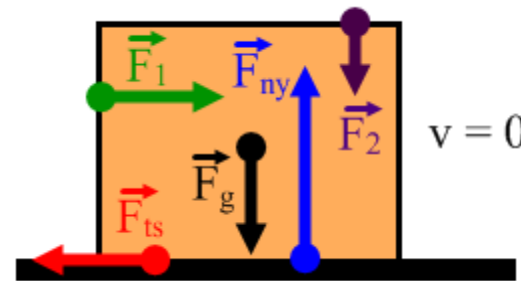


# Súrlódási erő

Három fajta lehet:

1. **tapadási:** A két felület egymáshoz képesti mozdulatlanságát igyekeznek megőrizni.

Értéke **bármekkora** lehet egy bizonyos **maximális** értékig (míg meg nem csúszik).

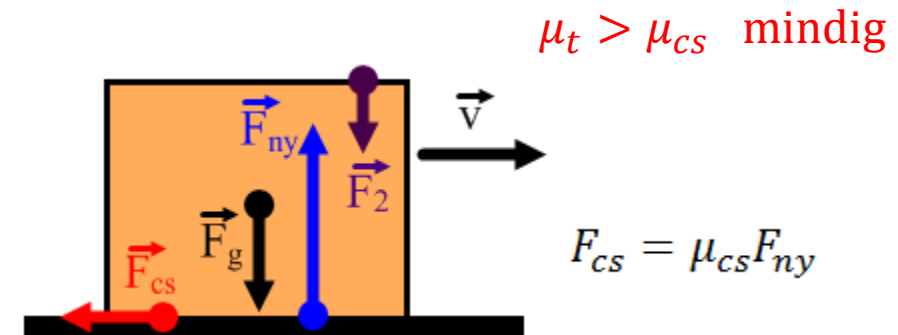


$$F_{ts} = F_1$$

amíg

$$F_1 \leq F_{ts,max}$$
$$F_{ts,max} = \mu_t F_{ny}$$

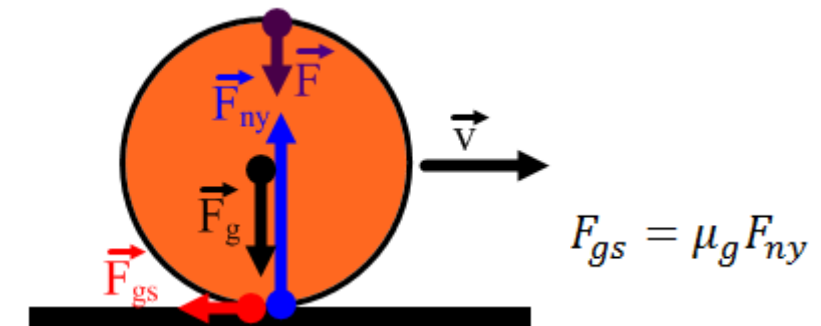
2. **csúszási:** Két egymáson csúszó felület között fellépő erő, mely a mozgást igyekezni gátolni. Csak az anyagi minőségtől ( $\mu$ ) és a felületeket összenyomó erőttől függ.



$$F_{cs} = \mu_{cs} F_{ny}$$

3. **gördülési:** Felületen guruló testre hat a mozgással ellenkező irányban.

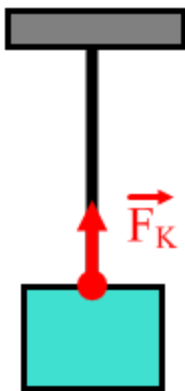
(pl. emiatt áll meg a guruló billiárd vagy teke golyó)



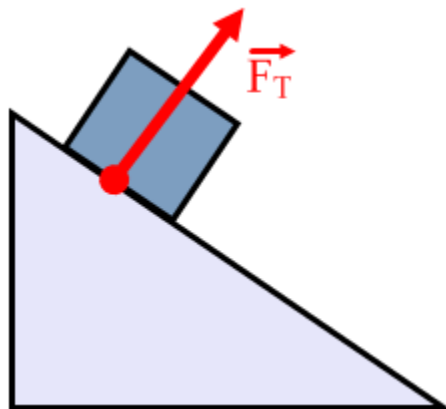
$$F_{gs} = \mu_g F_{ny}$$

# Kényszererők

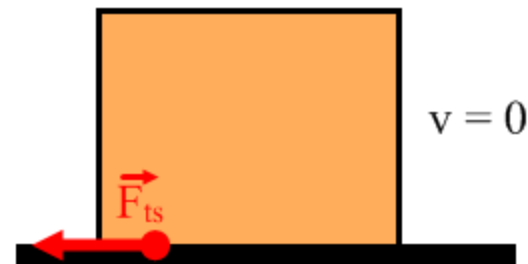
Ezek nagysága éppen akkora, hogy a **kényszerfeltétel** teljesüljön:  
pl. kötélerő, tartóerő, tapadási súrlódás (a megcsúszás határáig)



kötél nem nyúlik



nem mehet bele a lejtőbe



ne csússzon meg

# A dinamika alapegyenlete

Ha összegezzük Newton I., II., és IV. törvényét, akkor megkapjuk a **dinamika alapegyenletét**:

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Ezeket koordinátánként kiírva, illetve az erőkre beírva a megfelelő erőtvényeket, megkapjuk a **mozgásegyenleteket**. Pl. derékszögű Descartes koordinátarendszerben:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{ex}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} &= F_{ey}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} &= F_{ez}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{aligned} \right\} \text{ másodrendű, csatolt differenciálegyenletek}$$

Az erők nem függhetnek a gyorsulástól, mert az ellentmondana a szuperpozíció elvének.

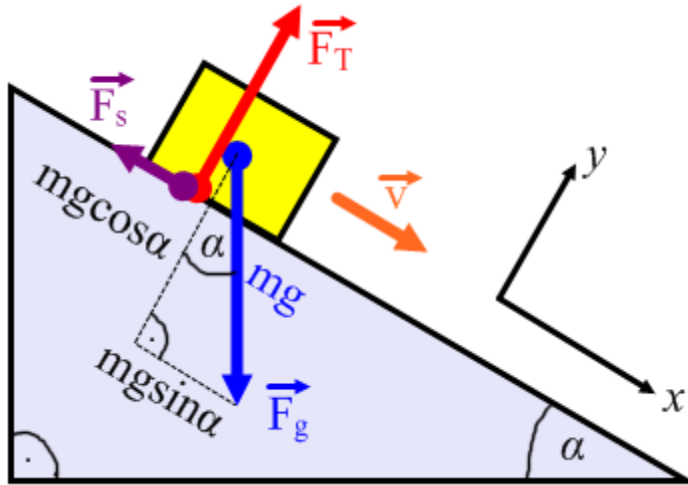
A megoldáshoz meg kell még adni 6 integrálási állandót. Ezek általában a **kezdeti hely** 3 koordinátája és a **kezdeti sebesség** 3 koordinátája:  $\vec{r}_0$  és  $\vec{v}_0$

Az egyenleteket megoldva megkapjuk a **mozgástörvényt**, mely megmondja, hogy a test hol tartózkodik egy bizonyos időben (a pálya egyenlete):  $\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$



## Példa: Lejtőn mozgó test \*

Alkalmazva a dinamika alapegyenletét: 
$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_g + \vec{F}_T + \vec{F}_s$$



Célszerű párhuzamos és merőleges komponenseket vizsgálni, mert tudjuk, hogy az  $y$  irányú eredő erőnek zérusnak kell lennie:

$$\begin{aligned} (x) \quad m\ddot{x} &= ma_x = mgsin\alpha - F_s \\ (y) \quad m\ddot{y} &= ma_y = 0 = F_T - mgcos\alpha \end{aligned}$$

Mivel a tartóerő egyben a nyomóerő is:

$$F_s = \mu mgcos\alpha$$

Beírva az  $(x)$  egyenletbe a súrlódást:

Ha  $a_x < 0$  jön ki megoldásnak: ←

$$\begin{aligned} ma_x &= mgsin\alpha - \mu mgcos\alpha \\ a_x &= g(sin\alpha - \mu cos\alpha) \end{aligned}$$

- a lefelé csúszó test lassul

Lejtőre helyezett test egyensúlyának feltétele:

- a nulla eredő erőhöz szükséges tapadási súrlódási erőnek kisebbnek kell lennie, mint a lehetséges maximális érték ( $\mu, F_T$ )

# Lendület

**Lendület (impulzus):** A test tömegének és sebességének szorzata.  
**vektormennyiség:** iránya a sebesség vektor iránya.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

**Lendülettétel:** A lendület erő hatására változik meg.  
Az eredő erő határozza meg a változási gyorsaságát:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_e$$

Bizonyítás állandó tömeg esetén:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_e$$

Tehát ha az eredő erő zérus (magára hagyott test), akkor a lendület állandó.

Az okozott lendületváltozás  $t_1$  és  $t_2$  között az eredő erő által:

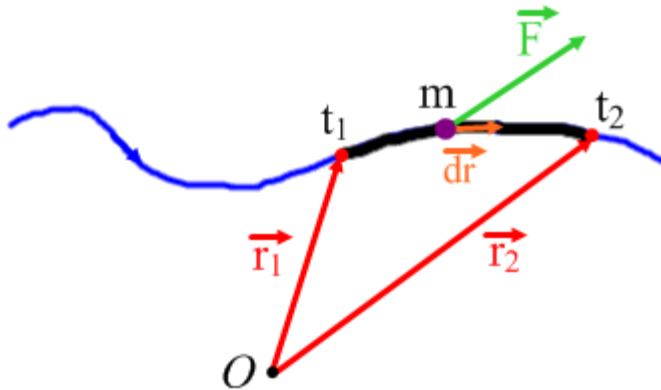
$$\Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_e dt$$

tömegtől független



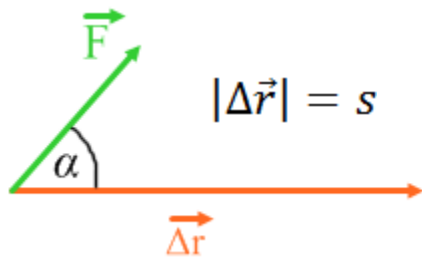
# Munka

**Munka:** Az erő vonal menti (görbe menti) integrálja a test pályája mentén két pont között.



$$W_{1,2} = \int_{\vec{r}_1(g)}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Speciális eset: A mozgás pályája egyenes, az erő pedig mindenütt ugyanaz a vektor.



$$W = \int_g \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_g F \cos \alpha dr = F \cos \alpha \int_g dr = Fs \cos \alpha$$

Ha az erő végig a mozgás irányába mutat ( $\alpha = 0$ ):  $W = Fs$

# Kinetikus (mozgási) energia

Ha egy nyugalomból induló tömegpontra állandó erő hat:

- a pont gyorsulása állandó:  $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$  (a mozgás pályája egyenes vonalú)  $\rightarrow a_x \rightarrow a$

-  $t$  idő múlva sebessége:  $v = at$ , a megtett út pedig:  $s = x = \frac{a}{2}t^2$

Tehát a testen végzett munka:  $W = Fs = ma \frac{a}{2}t^2 = \frac{1}{2}m(at)^2 = \frac{1}{2}mv^2$

Ez a test **kinetikus energiája**:  $E_K = \frac{1}{2}mv^2$  (a munkavégzés során átadott energia)

Mértékegység mindkettő esetében: J (Joule)

Negatív munka esetén a kinetikus energia csökken, a test lassul.

**Munkatétel:** A kinetikus energia megváltozása egyenlő az eredő erő által a testen végzett összes munkával.

$$W = \Delta E_K$$



# Teljesítmény

**Teljesítmény:** Az energiaközlés üteme (egységnyi idő alatt közölt energia).

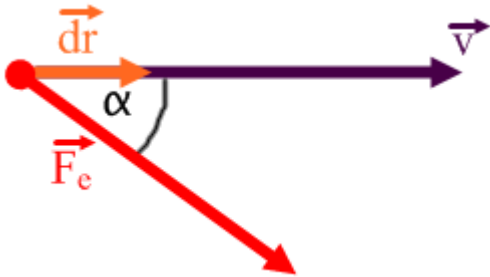
$$P = \frac{dE}{dt} \quad (\text{lehet közölt hőenergia, elektromos energia, mechanikában a munkavégzés során közölt energia})$$

A mechanikai **teljesítménytétel:** A tömegpontra ható erők teljesítménye egyenlő a test kinetikus energiájának változási gyorsaságával:

$$P = \frac{dE_K}{dt}$$

Az elemi munka:  $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dE_K$

A munkatétel felhasználásával:  $P = \frac{dE_K}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$



Végrehajtva egy változótranszformációt:

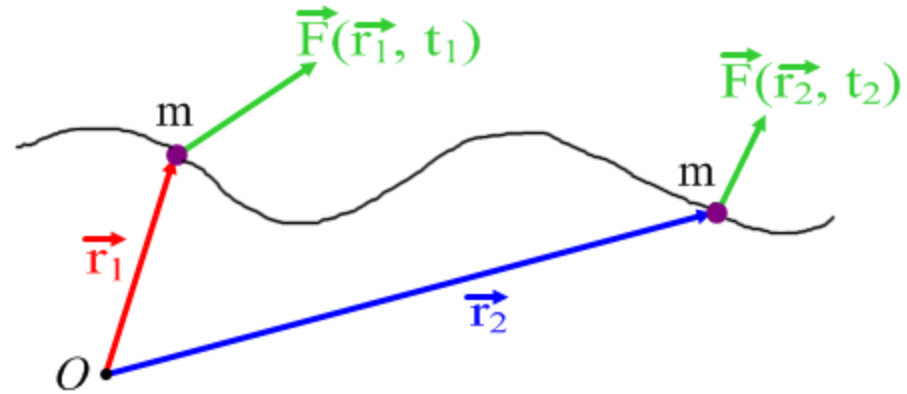
$$W_{1,2} = \int_{\vec{r}_{1,g}}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} P dt$$

**Példa: 4**

# Fizikai mező (erőtér)

**Fizikai mező:** Fizikai mezőről akkor beszélünk, ha a tér valamely tartományában és valamely időközben, az akkor és ott jelenlévő tömegpontra erő hat és ez a helykoordináták és az idő folytonosan differenciálható függvénye.

Tehát az  $\vec{r}$  és  $t$  az erő vektorfüggvény változói:  $\vec{F}(\vec{r}, t)$



- Az erőter lehet időtől független (**stacionárius**), tehát  $\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = 0$ .

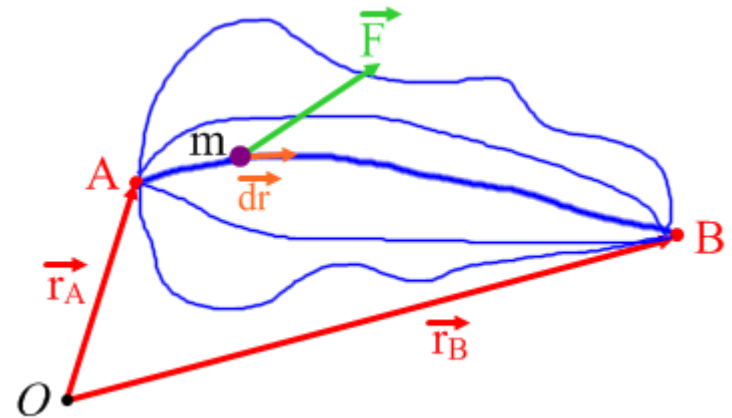
Ekkor az erő csak a helytől függ:  $\vec{F}(\vec{r})$

- Az erőter lehet helytől független (**homogén**), tehát  $\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} = 0$

Ekkor az erő csak az időtől függ:  $\vec{F}(t)$

# Konzervatív erőterek

**Konzervatív erőtér:** Olyan időtől független erőtér amelyben két pont között az erőtér által végzett munka független az útvonaltól, kizárólag a kezdő- és végponttól függ (ez ekvivalens azzal, hogy bármely zárt görbére a munka nulla).

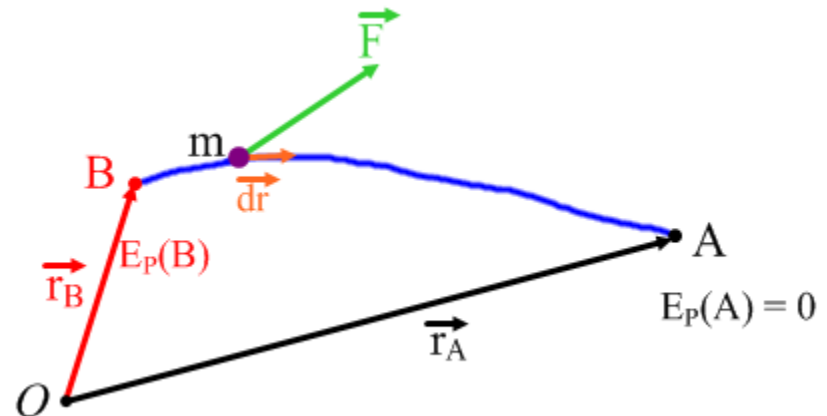


Ekkor a pontokat (pl. B) jellemezhetjük a munkával amit a tér végez amíg onnan a test egy kiválasztott nullpontba (pl. A) mozdul.

## **Potenciális (helyzeti) energia:**

A potenciális energia egy pontban (B) egyenlő azzal a munkával amit a **tér** végez miközben a test onnan a nullpontba (A) mozdul.

$$E_p(B) = W_{BA} = \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



## Példa: súlyerő munkája \*

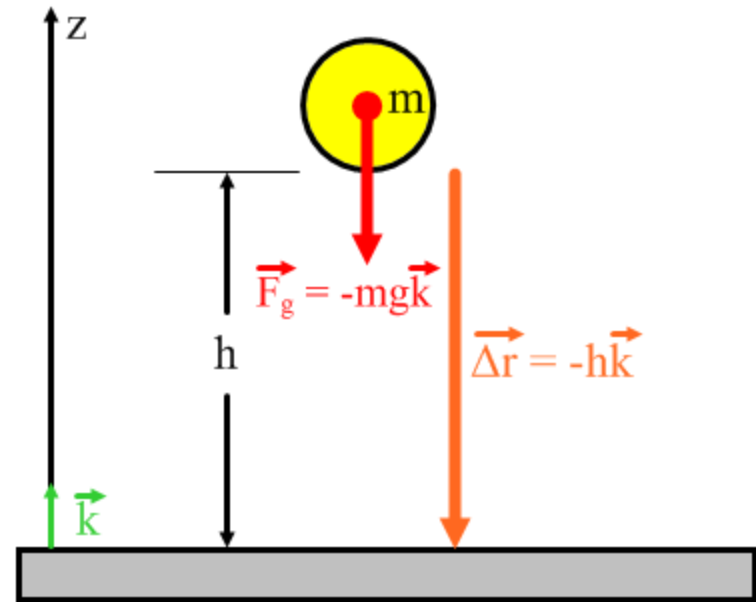
Legyen a padló szintje a potenciális energia nullpontja, és ejtsünk le egy  $F_g = 20\text{N}$  súlyú testet 80m magasról.

Ekkor a súlyerő munkája (vagyis a potenciális energia 80m magasan):

$$\begin{aligned} E_P(h) &= W_{h0} = \int_{h\vec{k}}^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{h\vec{k}}^0 (-mg\vec{k}) \cdot (dz\vec{k}) = \\ &= \int_h^0 -mg dz = -mg[z]_h^0 = mgh \end{aligned}$$

Természetesen ebben az egyszerű esetben használható a  $W = Fs$  képlet is, tehát a  $W = (mg)h = mgh$  egyből látható.

vagyis esetünkben:  $W = (20\text{N})(80\text{m}) = 1600\text{J}$





# Az energiaminimum elve

Nagyobb erő nagyobb potenciális energiakülönbséget jelent ugyanazon két pont között.  
Megfordítva: Minél nagyobb ütemben változik a potenciális energia a hely változásával, annál nagyobb a **tér által** kifejtett erő.

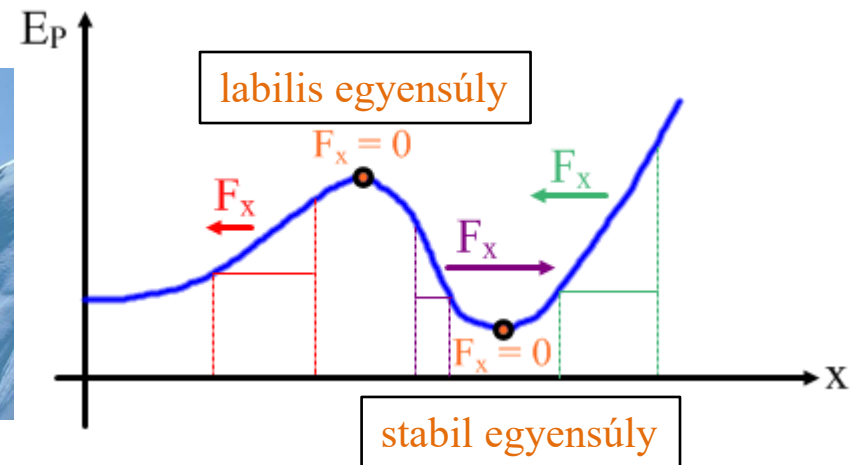
Homogén erőter esetén (illetve az átlagos erőt számolva) egy dimenzióban:  $F_x = -\frac{\Delta E_P}{\Delta x}$

Általánosan egy tetszőleges pontban egy dimenzióban:  $F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x}$

**Energiaminimum elve:** Az erő a csökkenő potenciális energia irányába hat (negatív jel).

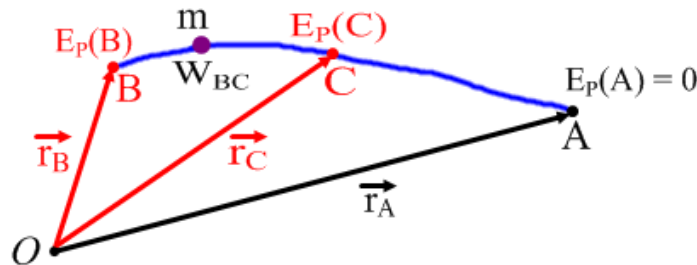
Három dimenzióban:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = \\ &= -\frac{\partial E_P}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial E_P}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial E_P}{\partial z} \vec{k} = \\ &= -\nabla E_P = -\text{grad} E_P\end{aligned}$$



# Mechanikai energia

Vegyük azt a speciális esetet **amikor csak konzervatív erők hatnak** miközben a test  $B$ -ből  $C$ -be mozdul.



Ekkor bármely  $B$  és  $C$  pontokra:  $E_p(B) - E_p(C) = W_{BC} = E_K(C) - E_K(B)$

$$-\Delta E_p = W_{BC} = \Delta E_K$$

Ennek az egyenletnek a differenciális alakja:  $-dE_p = \delta W = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = dE_K$

Tehát az **elemi munka a potenciális energia teljes differenciálja**.

Az eredeti egyenletet átrendezve:  $E_p(B) + E_K(B) = E_p(C) + E_K(C)$

A potenciális és a kinetikus energia összege **minden pontban megegyezik**.

Vezessük be a **mechanikai energiát**, mely a kinetikus és potenciális energiák összege:

$$E_M = E_p + E_K$$

Ez a mechanikai energia konzervatív erőterben megmarad:  $E_M(B) = E_M(C)$

## Nem konzervatív erők munkája \*

Amikor **nem konzervatív** erők ( $nk$ ) is hatnak (pl. súrlódás, közegellenállás, emberi munka) a tömegpontra:

$$W_{BC} = W_{BC}^k + W_{BC}^{nk} = E_K(C) - E_K(B)$$

Ahol:  $W_{BC}^k = E_P(B) - E_P(C)$  a konzervatív erő munkája.

Átrendezve a nem konzervatív erők munkájára, és behelyettesítve:

$$W_{BC}^{nk} = E_K(C) - E_K(B) - E_P(B) + E_P(C)$$

$$W_{BC}^{nk} = E_K(C) + E_P(C) - E_P(B) - E_K(B)$$

Mivel:  $E_K(C) + E_P(C) = E_M(C)$  és  $E_P(B) + E_K(B) = E_M(B)$

$$W_{BC}^{nk} = E_M(C) - E_M(B)$$

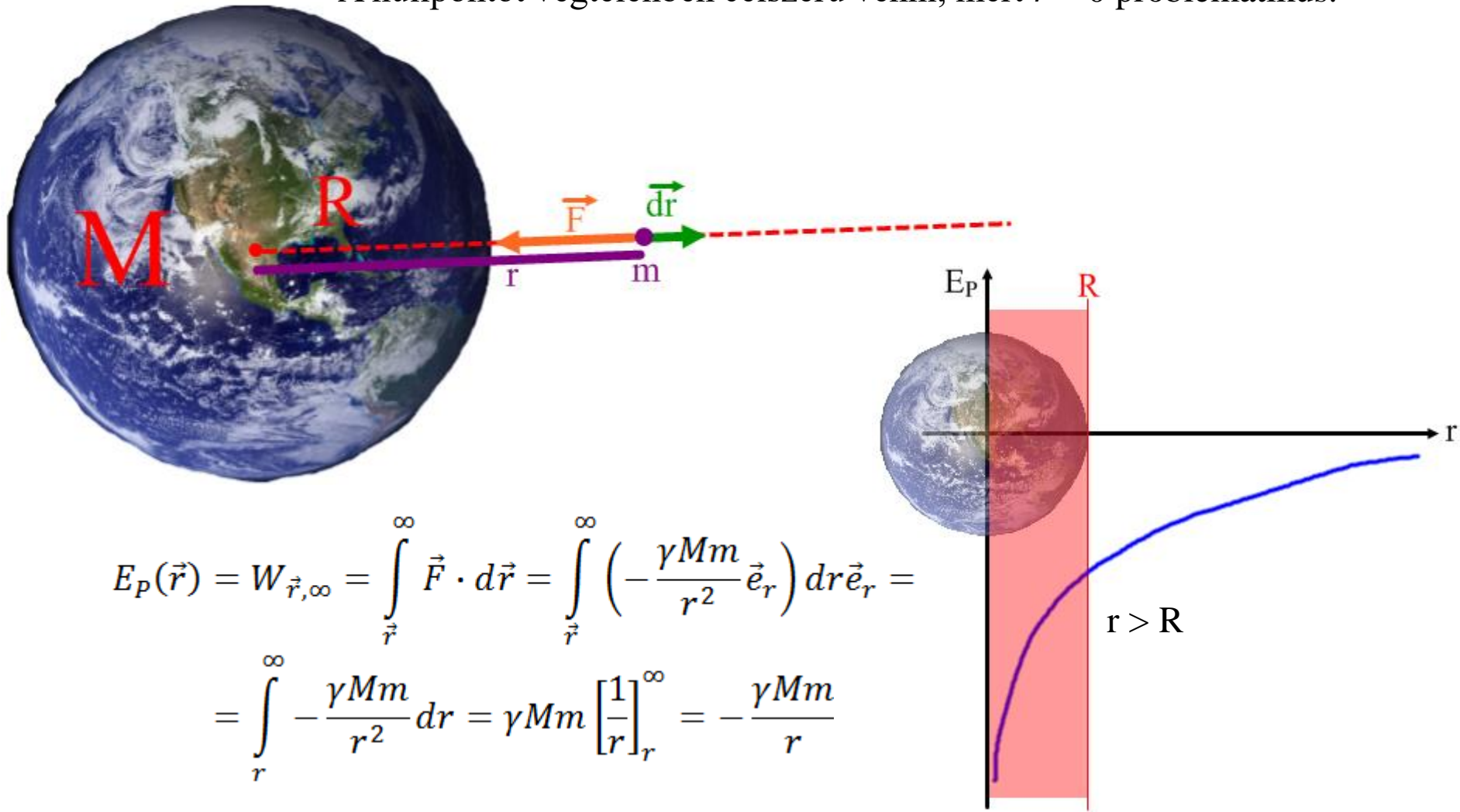
Tehát a nem konzervatív erők munkája egyenlő a mechanikai energia megváltozásával.

Példák konzervatív erőterekre

# Potenciális energia Newton-féle gravitációs mezőben

Legyen a  $M$  tömegű test rögzítve, és tőle  $r$  távolságban kiszámoljuk a  $m$  tömegű test potenciális energiáját. Az erő sugárirányú, ezért célszerű sugárirányú pályát venni.

A nullpontot végtelenben célszerű venni, mert  $r = 0$  problematikus.



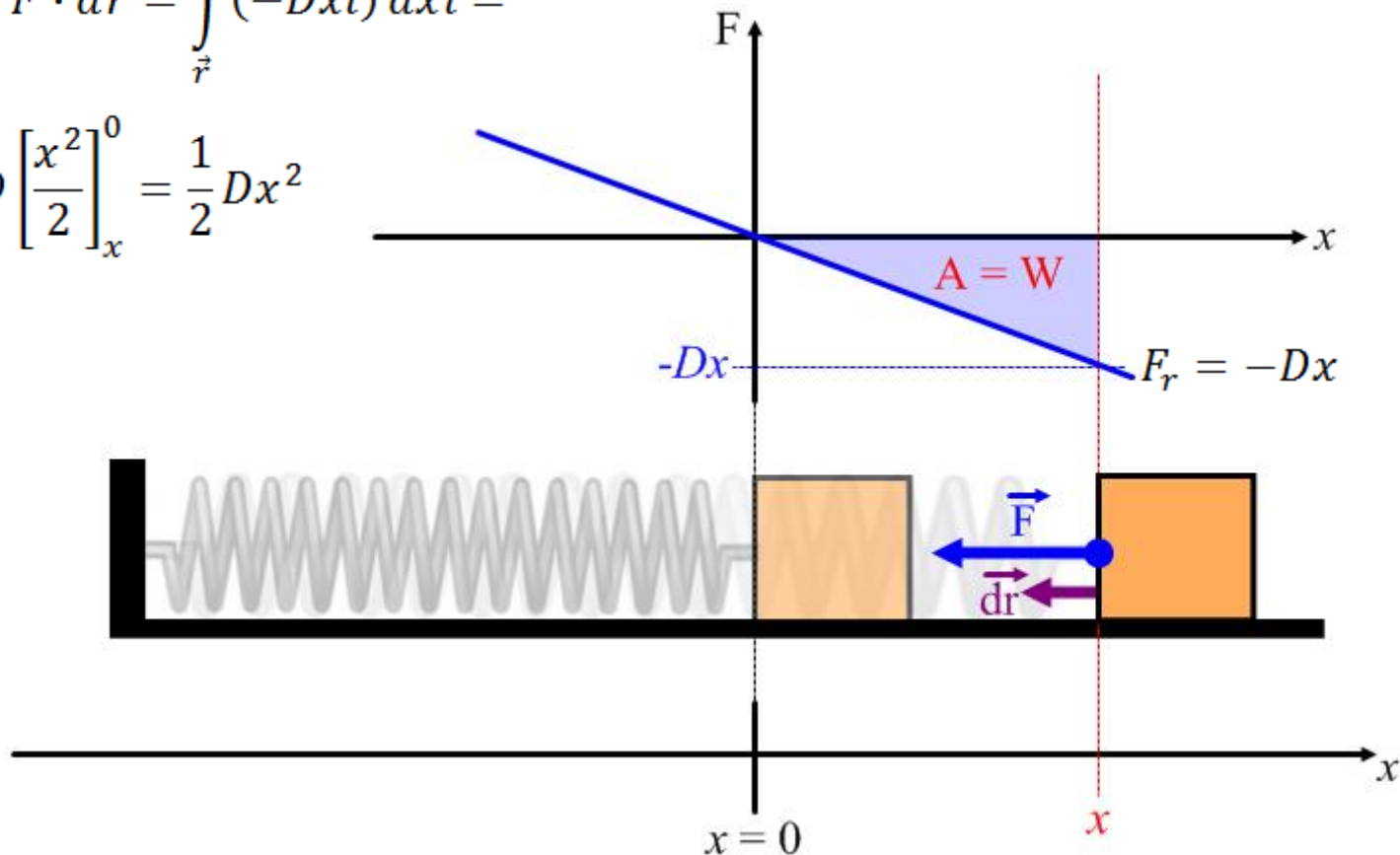
$$\begin{aligned} E_p(\vec{r}) &= W_{\vec{r}, \infty} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \left( -\frac{\gamma M m}{r^2} \vec{e}_r \right) dr \vec{e}_r = \\ &= \int_r^{\infty} -\frac{\gamma M m}{r^2} dr = \gamma M m \left[ \frac{1}{r} \right]_r^{\infty} = -\frac{\gamma M m}{r} \end{aligned}$$

# Rugóerő potenciális energiája

A Hooke-törvény értelmében az erő lineáris függvénye a hosszváltozásnak.  
Ez konzervatív erőteret eredményez.

Az  $x$  hosszal megnyújtott rúgó potenciális energiája:

$$\begin{aligned} E_P(x) &= W_{\vec{r},0} = \int_{\vec{r}}^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^0 (-Dx\vec{i}) dx\vec{i} = \\ &= \int_x^0 -Dx dx = -D \left[ \frac{x^2}{2} \right]_x^0 = \frac{1}{2} Dx^2 \end{aligned}$$



**Példa: 5**