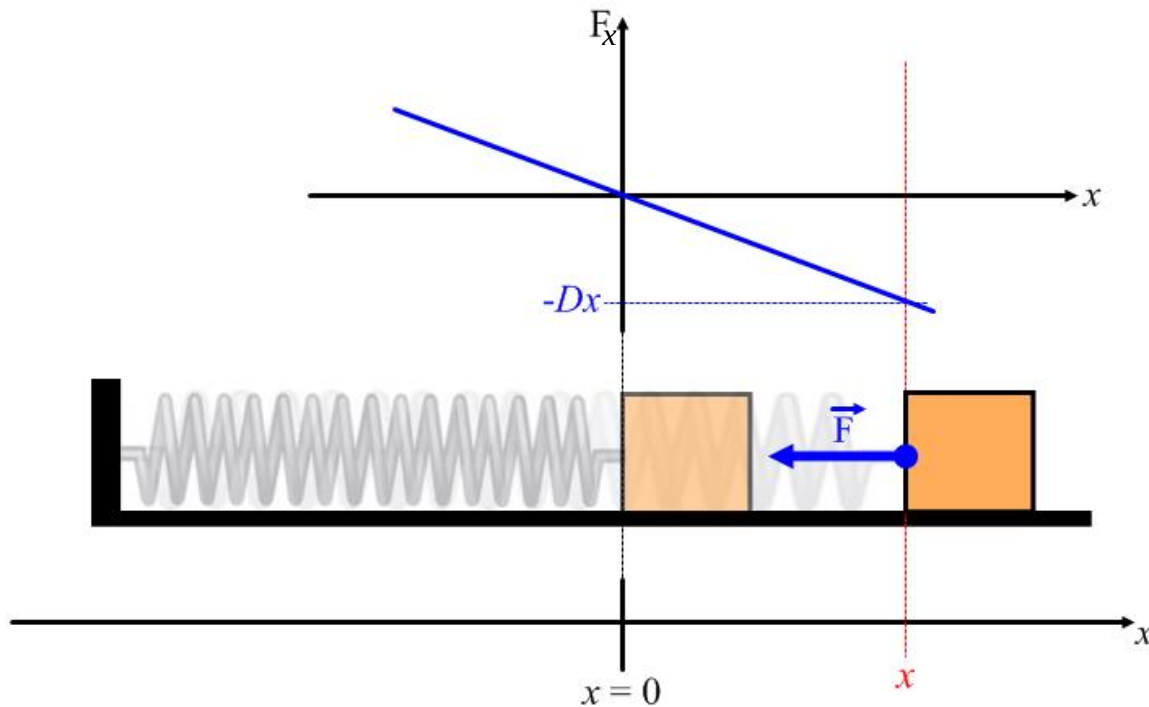


Rezgések

Harmonikus rezgőmozgás mozgásegyenlete

Harmonikus rezgés: Feltétele, hogy a testre ható erő harmonikus legyen: $F_x = -Dx$ (Hooke-törvény). Tehát pl. egy rúgóra akasztott test (ha minden más erő elhanyagolható).



Felírva a mozgásegyenletet:

$$ma_x = -Dx$$

$$m\ddot{x} = -Dx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{D}{m}x$$

Általános megoldás
(mozgástörvény):

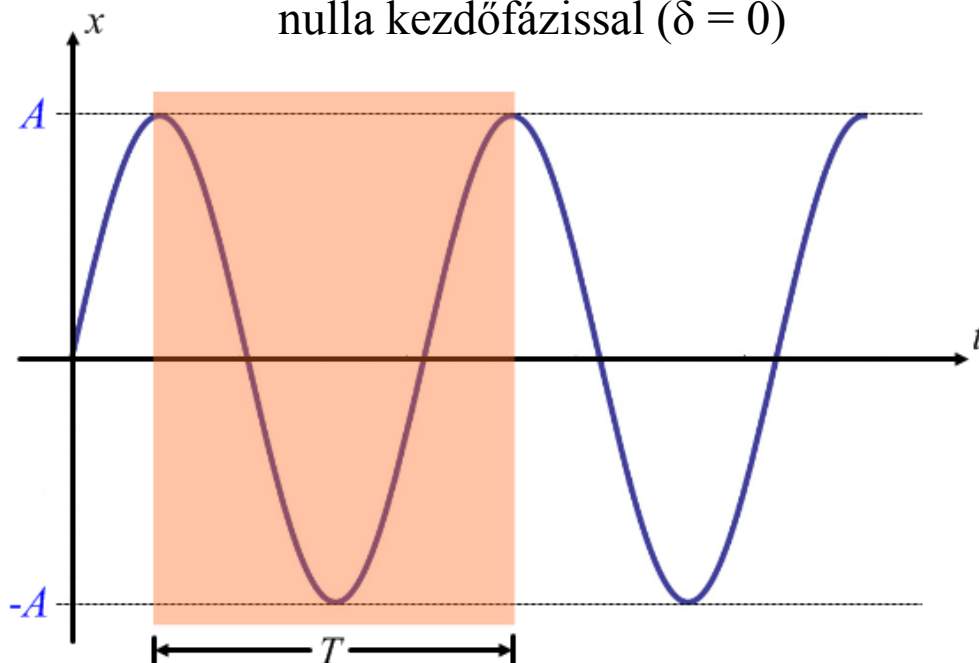
$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$$

kezdeti feltételek határozzák meg őket { A : amplitúdó (maximális kitérés)
 δ : kezdőfázis

ω : körfrekvencia (lásd később)

Harmonikus rezgőmozgás mozgástörvénye

Szinuszos harmonikus rezgőmozgás,
nulla kezdőfázissal ($\delta = 0$)



$$x(t) = x(t + T)$$

$$\omega(t + T) = \omega t + 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{körfrekvencia}$$

$$\omega = 2\pi f$$

A kitérés-idő függvény:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$$

Ezt deriválva kapjuk a
sebességet:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \delta)$$

A sebesség deriváltja pedig a
gyorsulás:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta)$$

Felhasználhatjuk: $x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$

Tehát a gyorsulásra: $a_x(t) = -\omega^2 x$

Mozgásegyenletben volt: $a_x = -\frac{D}{m}x$

$$\text{Tehát: } \omega^2 = \frac{D}{m}$$

Kinetikus és potenciális energia *

Kinetikus energia: A sebesség-idő függvényt felhasználva ($\delta = 0$)

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t)$$

Potenciális energia: A kitérés-idő függvényt felhasználva ($\delta = 0$) – rugalmas erőter

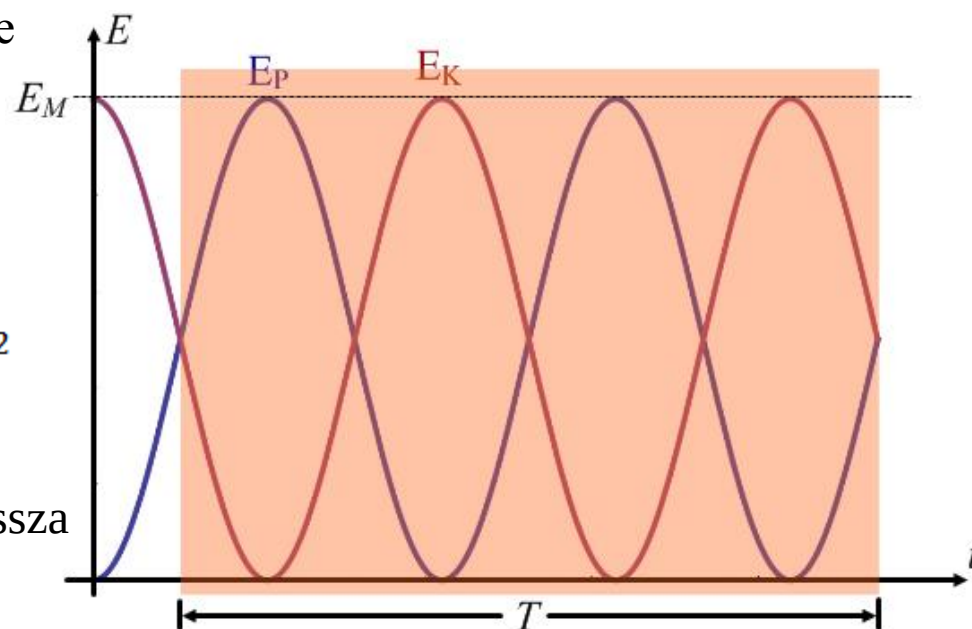
$$E_P = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t)$$

Mechanikai energia:

A potenciális és a kinetikus energia összege

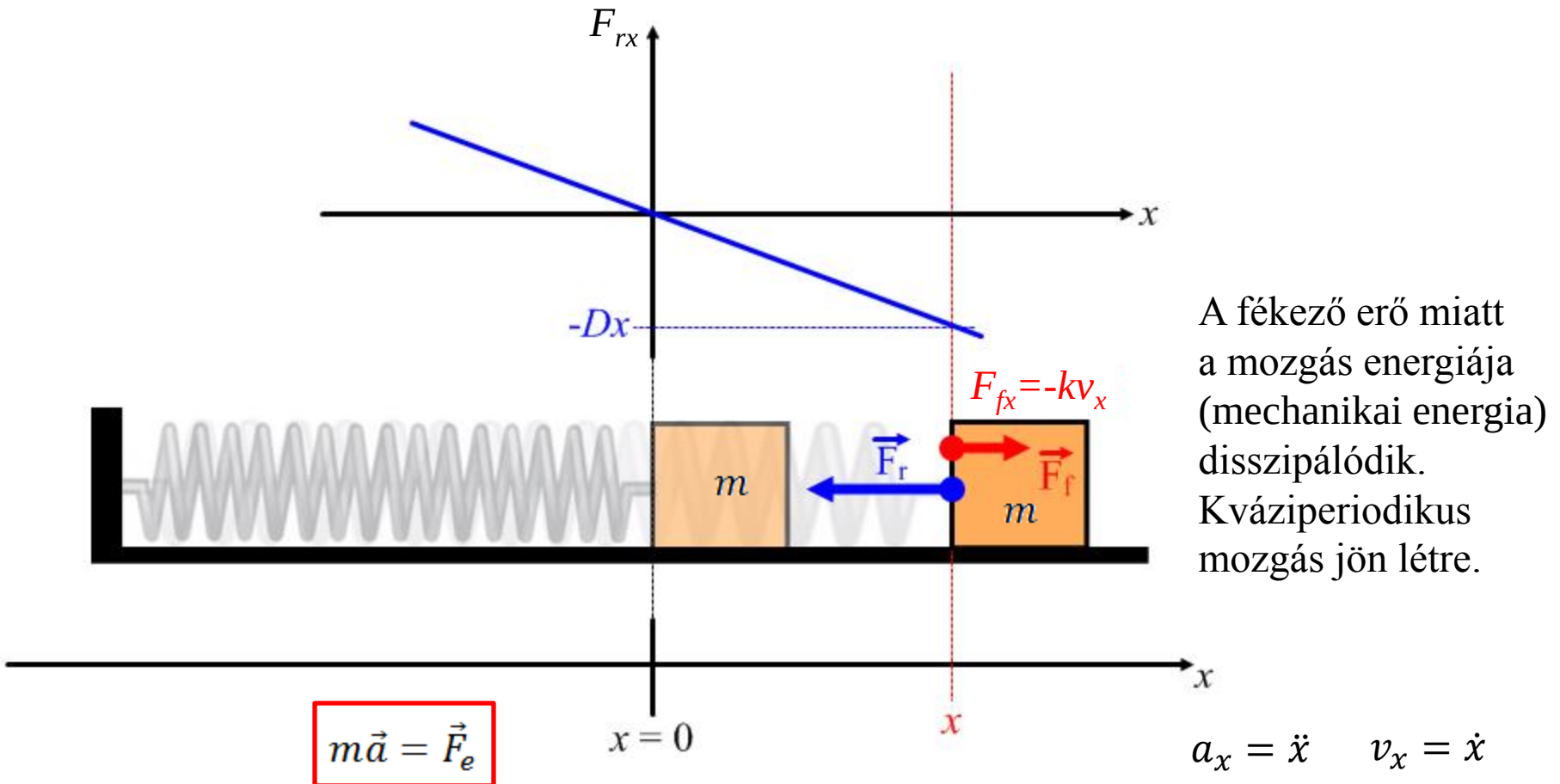
$$\begin{aligned} E_M &= E_K + E_P \\ &= \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t) \\ &= \frac{1}{2}DA^2[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)] = \frac{1}{2}DA^2 \end{aligned}$$

A potenciális és a kinetikus energia oda-vissza egymásba alakul a mozgás során.



Csillapított rezgés

Csillapított rezgés: A valóságban a rezgések lassan vagy gyorsan, de csillapodnak. A rugalmas erőn kívül, még egy sebességgel arányos fékező erőt figyelembe véve:



A fékező erő miatt a mozgás energiája (mechanikai energia) disszipálódik. Kváziperiodikus mozgás jön létre.

A mozgásegyenlet (egyenes vonalú mozgás x mentén): $m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$

Csillapított rezgés mozgástörvénye

Kiindulva a mozgásegyenletből : $m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0 \quad \frac{D}{m} = \omega_0^2 \quad \omega_0 - \text{a csillapítatlan rezgés körfrekvenciája (lenne!)}$$

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \alpha = \frac{k}{2m} \quad \alpha - \text{a csillapítási tényező}$$

Homogén, lineáris, másodrendű differenciálegyenlet. Megoldás exponenciális: $x = e^{\lambda t}$

Behelyettesítve: $\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\alpha\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0$ és $e^{\lambda t} \neq 0$

Egyszerűsítve kapjuk a karakterisztikus egyenletet: $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$

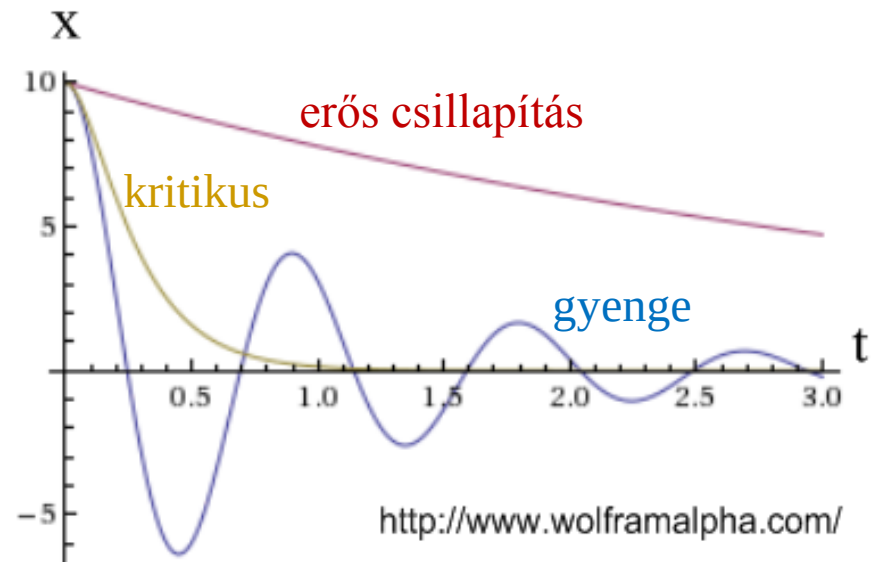
Megoldásai: $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

Három lehetséges eset

1. gyenge csillapítás: $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$

2. kritikus csillapítás: $\alpha^2 - \omega_0^2 = 0$

3. erős csillapítás: $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$



Gyengén csillapított rezgés

$$\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$$

A negatív diszkriminánst átalakítva:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\omega$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$x(t) = Ce^{-\alpha t} \sin(\omega t + \delta)$$

Ezt deriválva kapjuk a sebesség általános alakját:

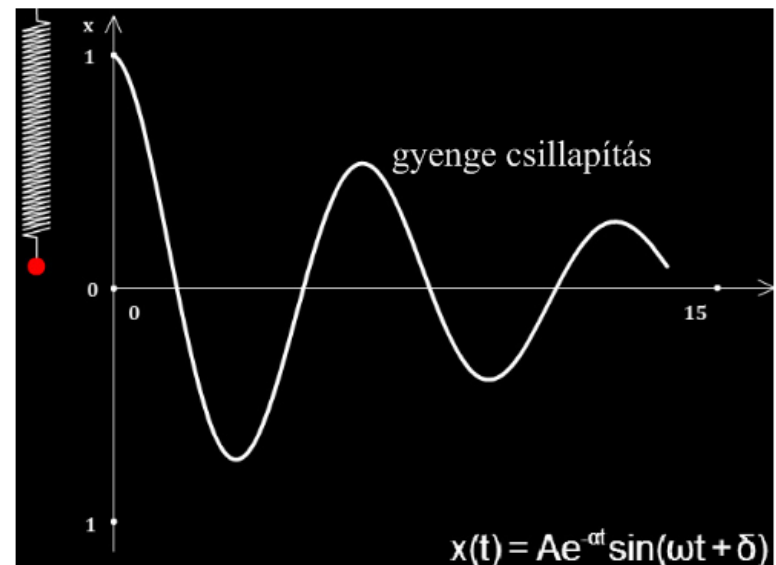
$$v(t) = -\alpha C e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \delta) + \omega C e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \delta)$$

A **C** és **δ** konstansokat a **határfeltételekből** lehet meghatározni.

Pl. $x(0)$ és $v(0)$ megadható, és a két egyenletet megoldva a konstansok kiszámolhatók.

[ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!](#)

Példa: 6



Kényszerrezgés

Egy periodikus erő pótolja a disszipált energiát:

$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} + F_0\sin(\omega t)$$

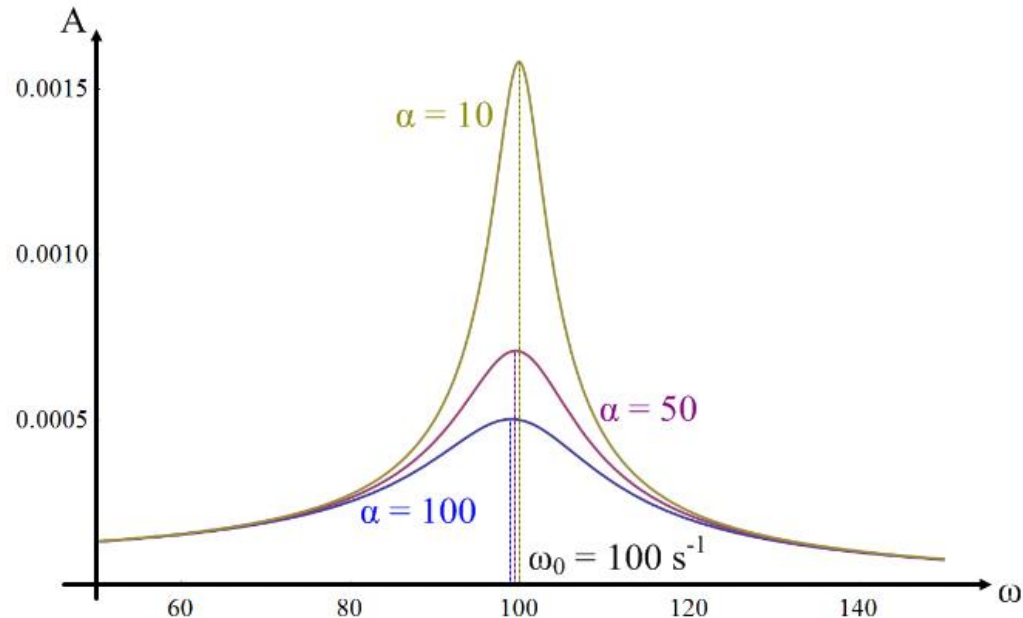
Megoldás: egy időben lecsengő (előzőhöz hasonlóan) rezgés, és egy állandósuló rezgés a gerjesztő frekvencián.

Tehát hosszabb idő múlva a mozgástörvény:

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \sin(\omega t - \delta) \quad \frac{D}{m} = \omega_0^2 \quad \begin{array}{l} \omega_0 - \text{sajátfrekvencia} \\ \delta - \text{fáziskésés} \end{array}$$

Rezonancia: Az az ω_r körfrekvencia, amire a rezgés amplitúdója a lehető legnagyobb.

Ha a csillapítás gyenge (α kicsi), akkor $\omega_r \approx \omega_0$ és az amplitúdó minden határon túl nőhet (amíg a rendszer szét nem esik...) – rezonancia katasztrófa.



Hullámok

Hullámok akkor jönnek létre amikor egy rugalmas közegben a közeg egy részének rezgése tovaterjed a közegben, azáltal, hogy a szomszédos pontok is átveszik a rezgést.

Pl. gitárhúr (1D), víz felülete (2D), hang vagy fény (3D)

A tovaterjedés sebessége a hullám **fázissebessége** (c).

Ez határozza meg milyen időközés van a két távoli pont rezgése között.

Tekintsünk egy x irányban terjedő síkhullámot
(vagy egy 1 dimenziós húron terjedő hullámot).

A rezgés az $x = 0$ helyen a szokásos harmonikus függvény: $y(t) = A \sin(\omega t)$

Ehhez képest az x helyen a rezgés x/c idővel késik:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= A \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] = A \sin \left(\omega t - \frac{\omega x}{c} \right) \\ &= A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi x}{Tc} \right) = A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) = A \sin(\omega t - kx) \end{aligned}$$

T : a rezgés **periódusideje** ω : a rezgés **körfrekvenciája** $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$

λ : a **hullámhossz** (periódusidő alatt megtett út) $\lambda = Tc$

k : **körhullámszám** $k = 2\pi/\lambda$

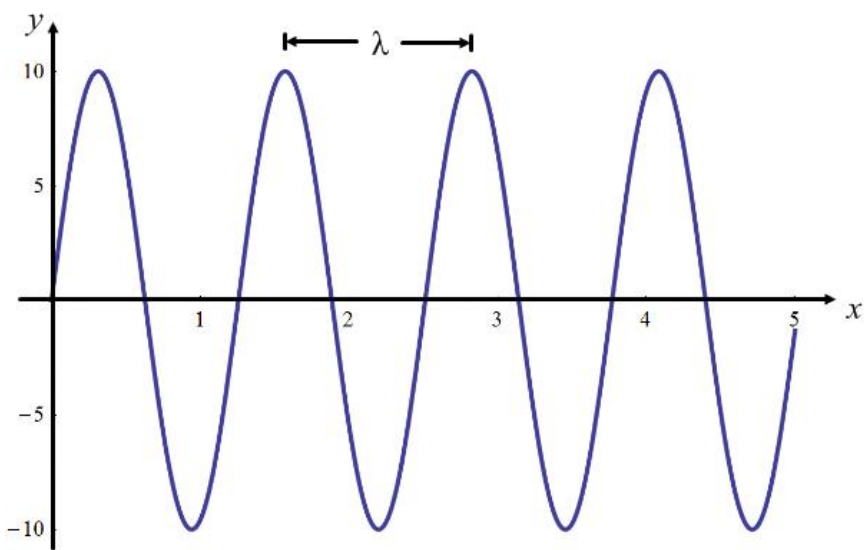
Mivel: $T = 1/f$ ezért

$$c = \lambda f$$

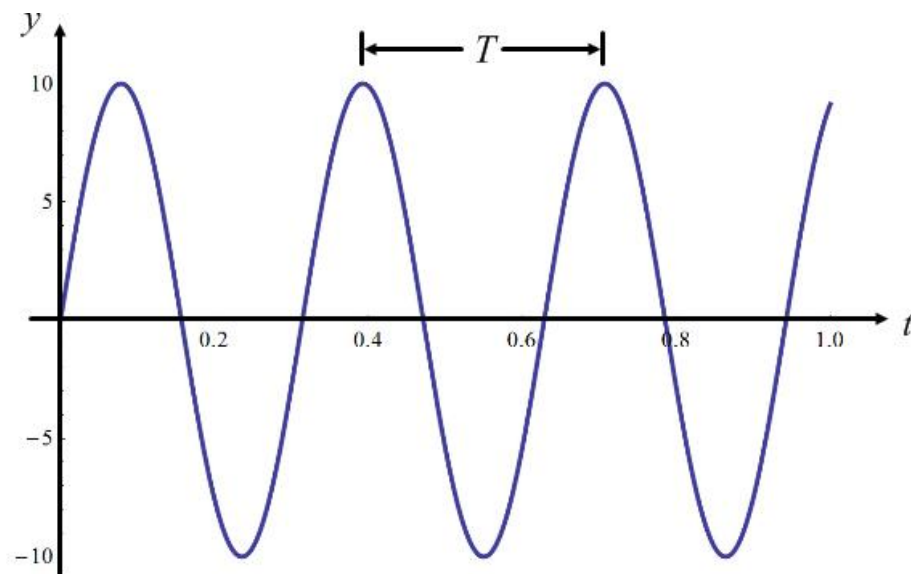


Hullámok: hely és időfüggés *

A hullám esetében a hely és időfüggés is periodikus függvény: $y(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$

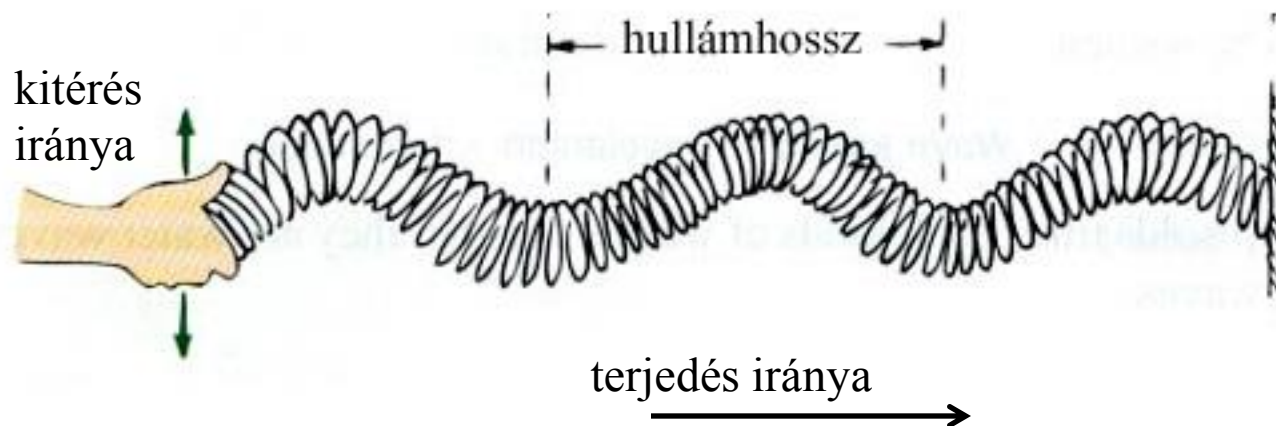


A térbeli periodicitás a hullámhossz
(adott időbeli pillanatkép)

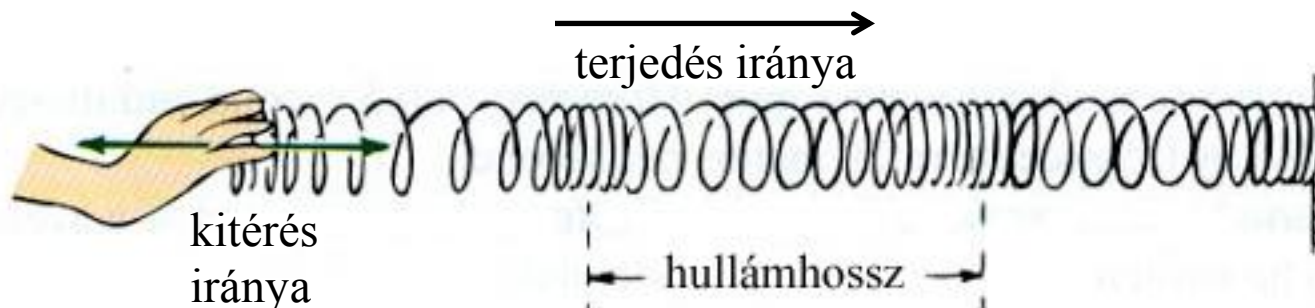


Az időbeli periodicitás a periódusidő
(adott helyen vizsgált rezgés időfüggése)

Transzverzális és longitudinális hullámok *

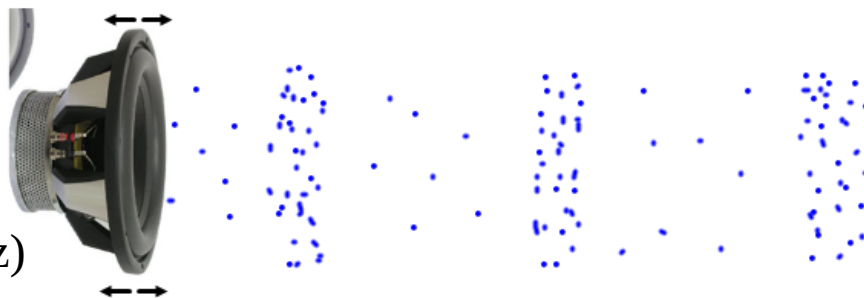


**transzverzális
hullám:**
a kitérés merőleges
a terjedési irányra



**longitudinális
hullám:**
a kitérés párhuzamos
a terjedési irányal

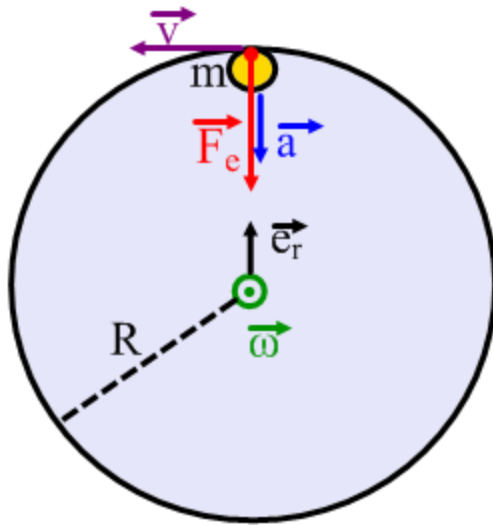
a hang is
longitudinális
hullám
(20Hz – 20kHz)



Körmozgás és forgómozgás

Egyenletes körmozgás dinamikája

Egyenletes körmozgás: A mozgás során a sebesség nagysága állandó, iránya viszont folyamatosan változik. Tehát van gyorsulás, ami a középpont felé mutat (**centripetális**). Ennek feltétele, hogy az eredő erő is abba az irányba mutasson (centripetális erő).



INERCIARENDSZERBEN TÁRGYALJUK

A dinamika alapegyenlete: $m\vec{a} = \vec{F}_e$

Gyorsulásnak csak centripetális (sugár irányú) komponense van.

Az eredő erő nagysága:

$$F_e = ma = ma_{cp} = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$$

Ezt az eredő erőt sokféle kölcsönhatás biztosíthatja: lehet pl. gravitációs erő, Coulomb-erő, kötelerő, nyomóerő, Lorentz-erő, stb. stb.

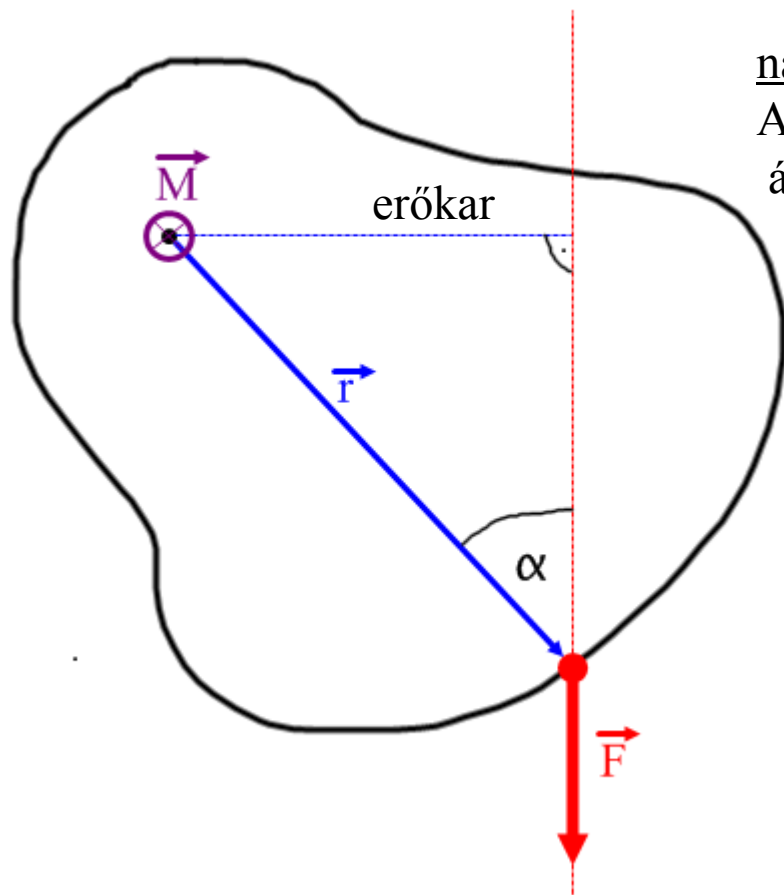
Ekkor $\vec{F}_e \perp \vec{v}$, tehát a **munkavégzés nulla**. A centripetális erő nem végez munkát.

A szögsebesség-vektor iránya a jobbkéz-szabállyal határozható meg. Az ábrán pl. kifelé.

Változó körmozgás - forgatónyomaték

Egy erő origóra (forgástengely) vonatkoztatott **forgatónyomatéka**: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Erőkar: az erő hatásvonalának a forgástengelytől mért távolsága



nagysága: erő $\times$ erőkar, vagyis $M = Fr_{\perp} = Fr \sin \alpha$

A forgatónyomaték nulla, ha az erő hatásvonala átmegy a forgástengelyen, maximális ha merőleges a helyvektorra.

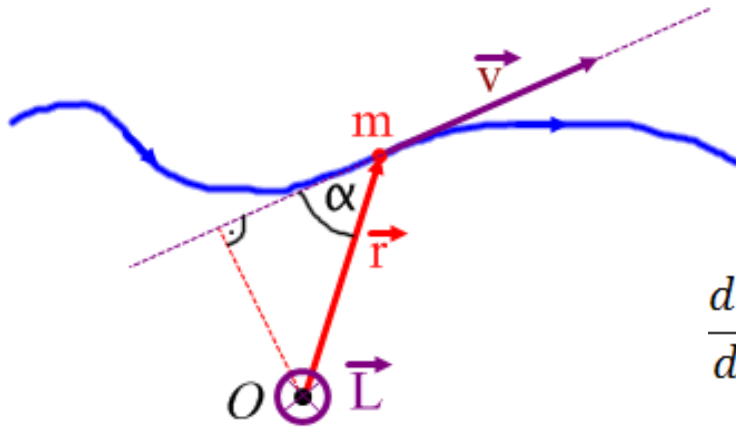
iránya: a vektorszorzat alapján (jobbkezeszabály) merőleges az erő és a helyvektor által meghatározott síkra.

Perdület (impulzusmomentum)

Pontszerű test **perdületének** általános definíciója: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$
(hasonló a forgatónyomaték definíciójához, ami az erő momentuma)

Ha a helyvektor és a sebesség merőleges, mint pl. egyenletes körmozgásnál:

$$L = rmv = mrv = mr\omega r = mr^2\omega$$



A perdület vektor a forgatónyomaték hatására változik meg:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \vec{v}) = m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \\ &= m(\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times (m\vec{a}) = \vec{r} \times \vec{F}_e = \vec{M}_e\end{aligned}$$

Perdülettétel:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_e$$

Kiterjedt testek, tömegpontrendszerek

Súlypont *

A testek mérete sokszor nem hanyagolható el a problémában szereplő méretekhez képest.
A kiterjedésük miatt a haladó mozgás mellett a forgó mozgásukat is figyelembe kell venni.

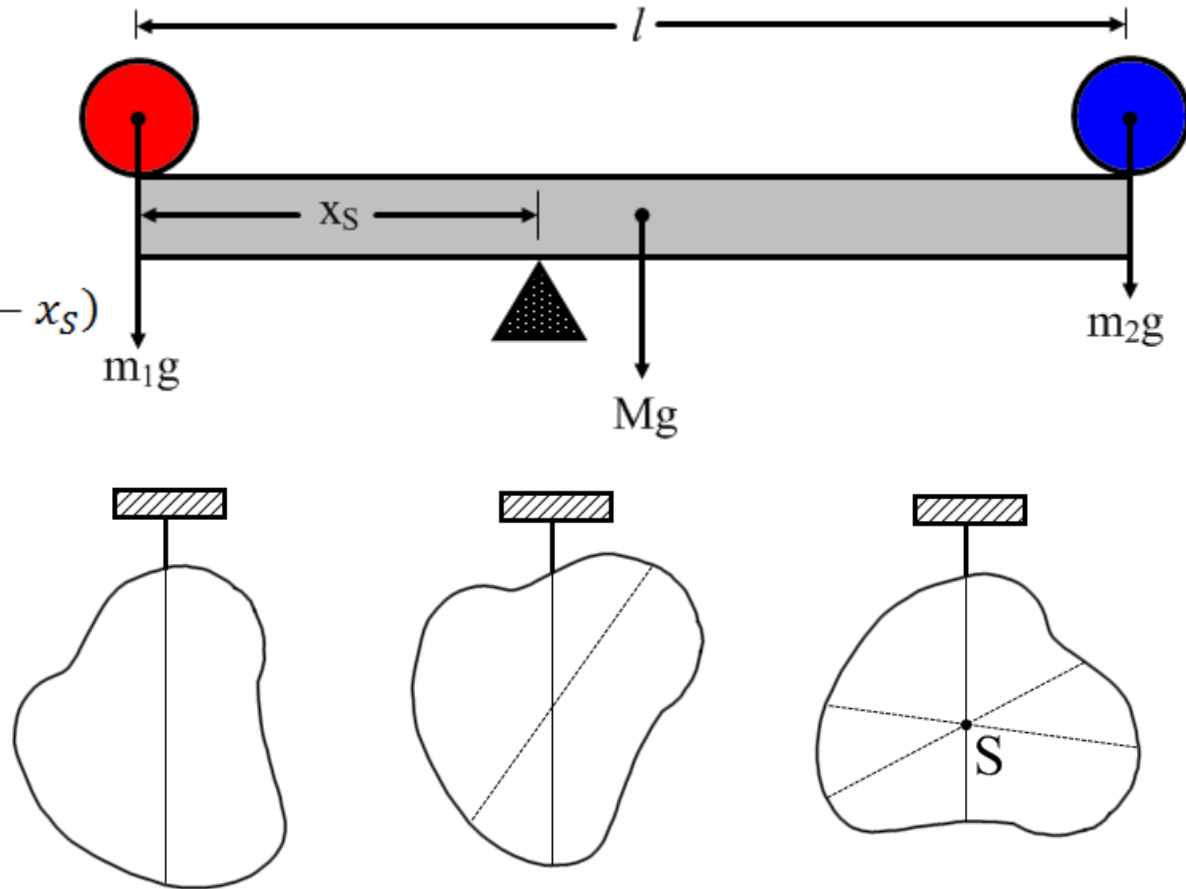
A **súlypont** az a pont ami alatt úgy alátámaszthatjuk a testet, hogy az egyensúlyban legyen:

Az alátámasztás helyére
az eredő forgatónyomatéknak
nullának kell lennie. **Például:**

$$m_1 g x_s = Mg \left(\frac{l}{2} - x_s \right) + m_2 g (l - x_s)$$

$$x_s = \frac{Mg \left(\frac{l}{2} \right) + m_2 g l}{m_1 g + Mg + m_2 g}$$

Egy bonyolult alakú test
súlypontját azt több pontjában
felfüggesztve határozhatjuk
meg, mint a függőleges
vonalak metszéspontja:

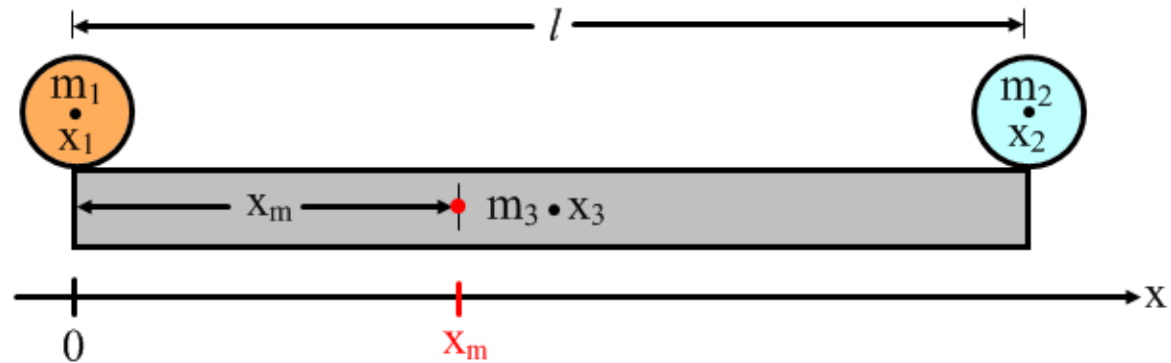


Tömegközéppont *

Kiterjedt test **tömegközéppontjának** helye a testet felépítő pontok helyének tömegekkel súlyozott átlaga (illetve a részek tömegközéppontjainak tömegekkel súlyozott átlaga):

A **példában** az összetett test tömegközéppontjának x koordinátája:

$$x_m = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 l + m_3 \left(\frac{l}{2}\right)}{m_1 + m_2 + m_3}$$



A **tömegközéppont** helye általában: $(x_m, y_m, z_m) = \left(\frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \right) =$

$$= \left(\frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{m}, \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{m}, \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{m} \right) \quad \text{tehát: } \boxed{\vec{r}_m = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{m}} \quad \text{ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!}$$

A legtöbb esetben a **súlypont** és a **tömegközéppont** helye ugyanott van, és a kettő közül bármelyik használható. Különbség a két pont helye között csak akkor van, ha a test mérete olyan nagy, hogy a gravitáció nem tekinthető a test minden pontjára ugyanolyan erősségűnek.

Lendülettétel tömegpontrendszerre

Pontrendszer mozgásának vizsgálatához írjuk fel a **lendülettételt** az egyik pontra (i):

A rá ható külső erők eredője: $\vec{F}_i$

A j -edik pont által kifejtett erő: $\vec{F}_{ji}$

A dinamika alapegyenletét is felhasználva az általános (i -edik) tömegpontra:

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_i = m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji}$$

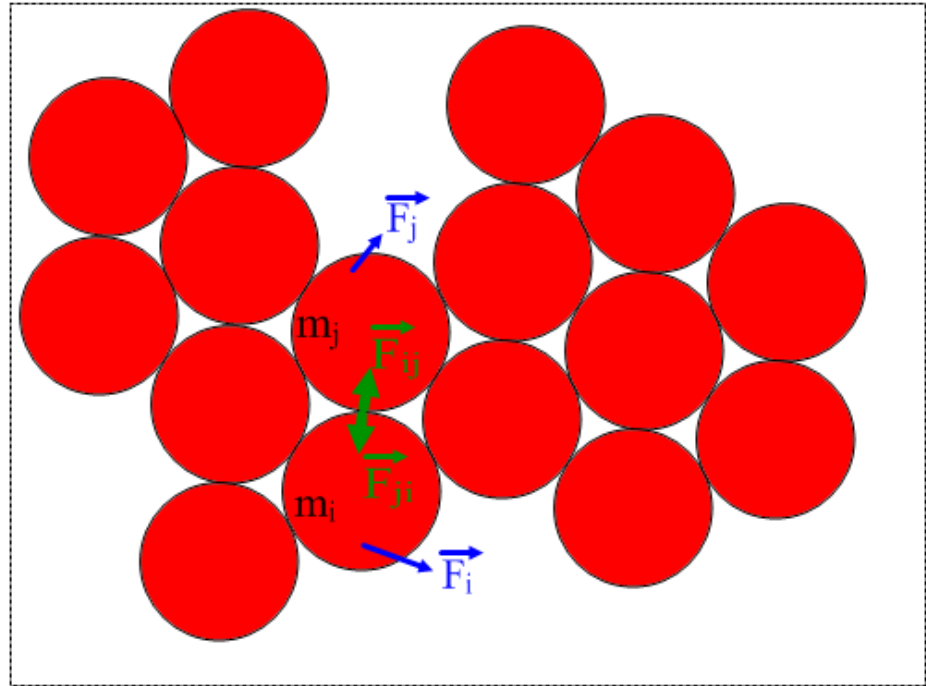
Összegezve a test minden pontjára:

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji}$$

Lendülettétel tömegpontrendszerre:

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

A belső erők kiesnek (Newton 3. axiómája): $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$



Ha a pontrendszerre ható külső erők eredője nulla, akkor a lendület állandó.

Ütközések

Ha az ütköző testek zárt rendszert alkotnak (külső erők nem hatnak rájuk), akkor az ütközés során mindig teljesül a lendületmegmaradás.

A rendszer tagjainak lendülete összesen ugyanazt adja az ütközés előtt mint után:

$$\vec{p}_{A1} + \vec{p}_{B1} + \vec{p}_{C1} + \dots = \vec{p}_{A2} + \vec{p}_{B2} + \vec{p}_{C2} + \dots$$

$$m_A \vec{v}_{A1} + m_B \vec{v}_{B1} + m_C \vec{v}_{C1} + \dots = m_A \vec{v}_{A2} + m_B \vec{v}_{B2} + m_C \vec{v}_{C2} + \dots$$

Ez általában 3 független egyenletet jelent a lendület x , y és z komponenseire.

Erre akkor van szükség ha az ütközés térben játszódik le és nem centrális (pl. két egymáshoz vágott labda, melyek sebességvektorai nem a másik tömegközéppontjának irányába mutatnak, vagy egy szétrobbanó tűzijáték esetében is alkalmazható)

Billiárdgolyók ütközése az asztal síkjában két egyenletet eredményez.

Egyenes mentén mozgó két test centrális ütközése pedig csak egyet:

$$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

Ha ellentétes irányban halad a két test, akkor ez egyik sebesség negatív.

Extrém esetek:

Tökéletesen rugalmatlan ütközésnél a két test összetapad: $v_{A2x} = v_{B2x}$ és $m = m_A + m_B$

Tökéletesen rugalmas ütközésnél a kinetikus energia is megmarad:

$$\frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B1}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B2}^2$$

Ütközési szám *

A valóságos ütközések se nem tökéletesen rugalmatlanok, se nem tökéletesen rugalmasak. Az **ütközési szám** azt mutatja meg, hogy mennyire rugalmas az ütközés. Ez a szám a távolodási sebesség és a közeledési sebesség hányadosa.

Az ütközési szám:

$$k = \frac{v_{B2} - v_{A2}}{v_{A1} - v_{B1}}$$

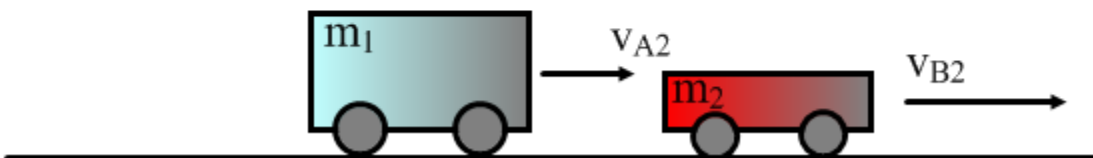
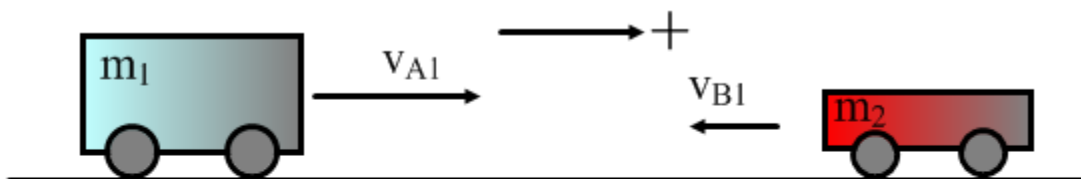
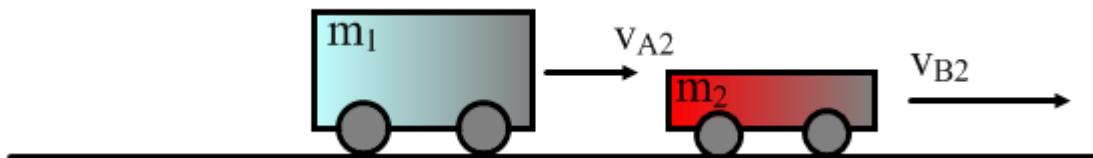
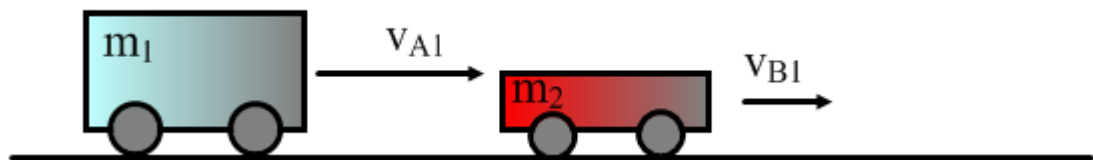
Extrém esetek:

tökéletesen rugalmatlan: $k = 0$

tökéletesen rugalmas: $k = 1$

általánosan: $0 \leq k \leq 1$

Egyszerűbb ezt használni a kinetikus energia megmaradása helyett, mert ez nem másodfokú.



[ANIMÁCIÓ IDEKATTINTVA!](#)

Merev testek egyensúlya

Egy **merev test** bármely két pontjának távolsága időben állandó (nem deformálódik).

Egy merev test egyensúlyának feltételei:

- a testre ható külső erők eredője nulla és
- a külső erők bármely pontra (illetve tengelyre) vonatkozó forgatónyomatékainak eredője nulla.

Itt az egyensúly nem csak a statikus állapotot jelenti, hanem állandó sebességű mozgást és állandó szögsebességű forgást is.



Folyadékok és gázok mechanikája

Hidrosztatikai nyomás *

A folyadékok és gázok közös tulajdonsága, hogy alakjukat szabadon változtatják. Ha a részecskékből álló felépítés helyett ezeket folytonos tömegeloszlásúnak tekintjük, akkor **kontinuumról** beszélünk.

Hidrosztatika: nyugvó folyadékok mechanikája

Nyomás: Egy pontban a nyomás a pontot körülvevő (végtelen) kicsiny felületre ható erő felületre merőleges komponense, osztva a felület nagyságával. Skalár mennyiség.

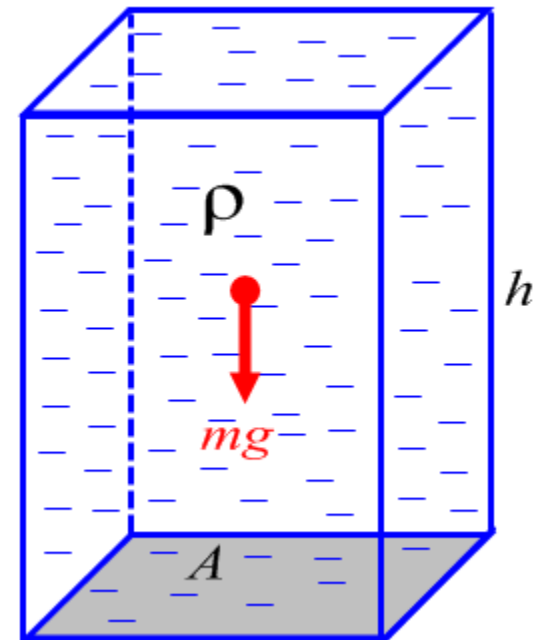
$$p = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{F_{\perp}(A)}{A} \quad \text{Mértékegysége: } [p] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa (Pascal)}$$

A **hidrosztatikai nyomás** a folyadék (h magasságú oszlop) súlyereje által okozott nyomás (egyenletesen oszlik el):

$$p = \frac{F_{\perp}(A)}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{V\rho g}{A} = \frac{Ah\rho g}{A} = h\rho g \quad \rho: \text{sűrűség}$$

Mivel a folyadék alakja szabadon változhat, adott mélységben a nyugvó folyadék nyomása nem függ a felület irányításától, a kifejtett erő pedig mindig merőleges a felületre.

Pascal törvénye: Egynemű nyugvó folyadék azonos magasságú pontjaiban a nyomás azonos.



Pascal törvénye – Példa *

Egy U alakú üvegcső baloldali vége zárt, a másik nyitott. A csőben alul $13,6\text{g/cm}^3$ sűrűségű higany, a jobb szárban efölött 50cm magas vízoszlop van. A légköri nyomás 1bar , a bal szárban a Hg fölött a levegő nyomása $0,9\text{bar}$. Mekkora a magasságkülönbség a két higanyszint között?

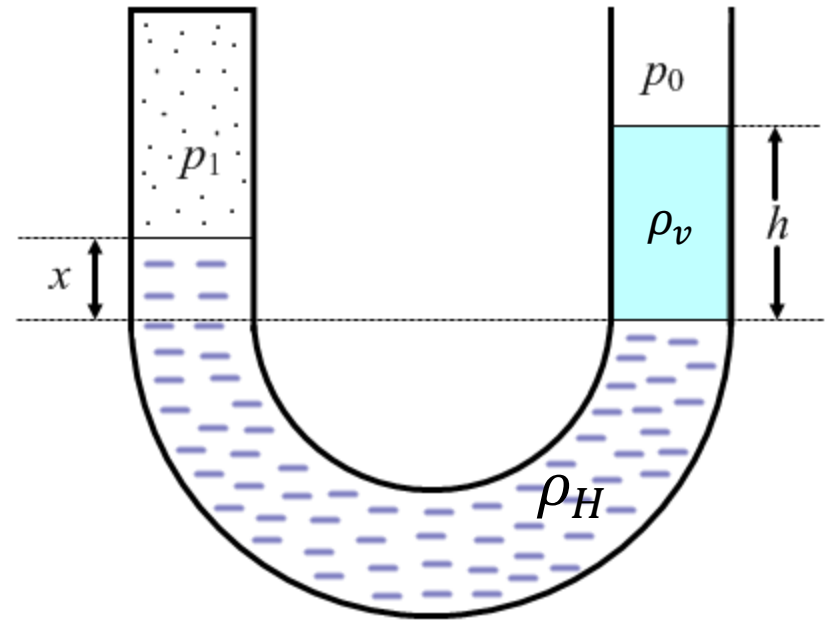
$$p_0 = 10^5\text{Pa}, \quad p_1 = 0,9 \cdot 10^5\text{Pa}, \quad h = 50\text{cm}$$

A higanyban, mint egynemű nyugvó folyadékban a szaggatott vonallal megjelölt szinten a bal és jobb oldalon meg kell egyeznie a nyomásnak:

$$p_b = p_j$$

$$p_1 + x\rho_H g = p_0 + h\rho_v g$$

$$x = \frac{p_0 + h\rho_v g - p_1}{\rho_H g} = \dots = 11,17\text{cm}$$



Felhajtó erő *

A **felhajtó erő** a folyadék által a test teljes felületére kifejtett eredő erő.

A téglatest alakú test lapjaira:

- elülső és hátulsó eredője nulla
- bal oldali és jobb oldali eredője nulla
- alsó és felső eredője...

$$\begin{aligned} F_f &= F_{fel} - F_{le} = p_{lent}A - p_{fent}A = \\ &= \rho_f g(h + c)A - \rho_f ghA = \rho_f gcA = \\ &= \rho_f Vg = m_f g \end{aligned}$$

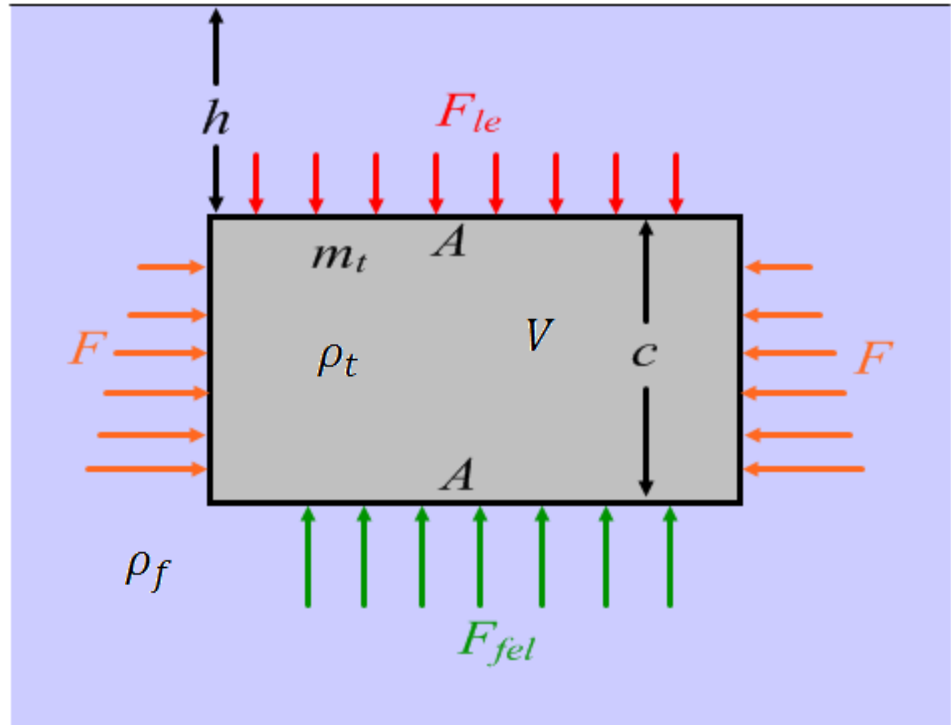
V a test által kiszorított folyadék térfogata, aminek tömege m_f

Tehát a felhajtó erő nagysága egyenlő a kiszorított folyadék súlyával. Ez más alakra is igaz.

Archimédész törvénye: Minden folyadékba mártott testre felhajtó erő hat, amely egyenlő a kiszorított (bemerülő rész által) folyadék súlyával.

Példa: 7

Ha a test sűrűsége nagyobb mint a folyadéké akkor elmerül, mert a felhajtóerő kisebb mint a test súlya. Ha a folyadék sűrűsége nagyobb, akkor a test egy része nem merül el, a test úszik.



Termodinamika (Hőtan)

Termodinamika

A **hőtan** nagyszámú részecskéből (pl. gázmolekulából) álló makroszkópikus rendszerekkel foglalkozik. A nagy számok miatt érdemes a **mólt** bevezetni, ami egy **Avogadro-számnyi** ($6,022 \cdot 10^{23}$ db) részecskét jelent (12-es tömegszámú szénatomok száma 12 gramm szénben).

Ennek megfelelően az atomi tömegegység a 12-es tömegszámú szénatom tömegének 1/12-ed része: $1 \text{ ATE} = 1,661 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

A végbemenő folyamatok **kvázisztatikusak**, a rendszert leíró mennyiségek a folyamat során minden pillanatban ki vannak egyenlítődve (egyensúlyi állapotokon keresztüli „lassú” változás).

A rendszert leíró makroszkópiusan mérhető mennyiségek az **állapothatározók**.

Extenzív állapotahatározók: a rendszer egészére jellemzők, és több rendszer egyesítésekor ezek összeadódnak (pl. térfogat, részecskeszám, tömeg, energia).

Intenzív állapotahatározók: pontról pontra mérhetőek, több rendszer egyesítésekor ezek kiegyenlítődsre törekednek (pl. nyomás, hőmérséklet, sűrűség, energiasűrűség).

Fenomenologikus elmélet: leírás csak az állapotahatározókon keresztül.

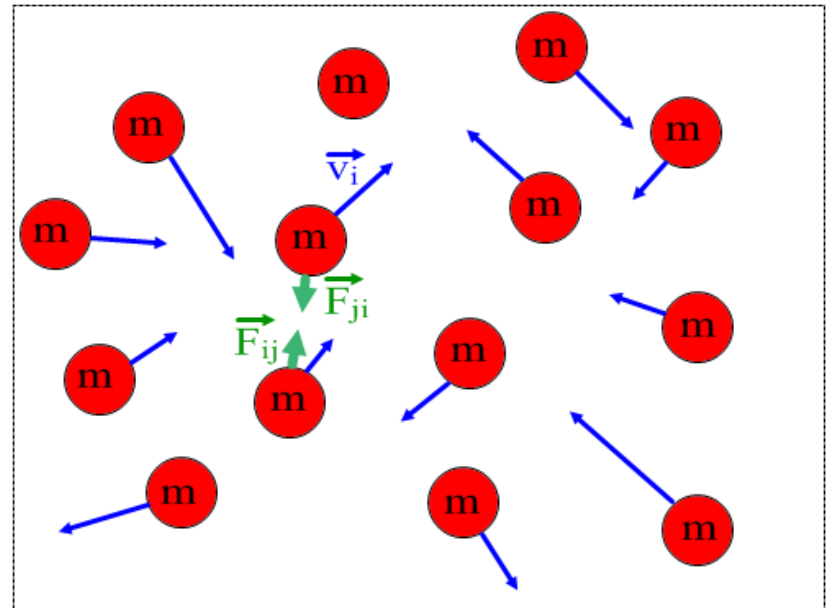
Statisztikus elmélet: a nagyszámú részecskére statisztikai törvényszerűségek alkalmazása.

Belső energia

A rendszer **belső energiája** a részecskék egymáshoz (rendszer tömegközéppontjához) képesti rendezetlen mozgásából származó **kinetikus energia** és a részecskék közötti Van der Waals kölcsönhatáshoz tartozó **potenciális energia**.

$$N \text{ db részecskére: } E_b = \sum_{i=1}^N E_{Ki} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E_{Pij}$$

Brown-mozgás: A kálium-permanganát (KMnO_4) oldódása vízben azt mutatja, hogy a víz részecskéi nagysebességgel ütköznek a festék rögöcskéikkel. A részecskéknek tehát sebességük, és így mozgási energiájuk van. Mivel számuk igen nagy, ez az energia jelentős.



Bizonyos esetekben a részecskék közötti kölcsönhatások (rugalmas ütközéseket leszámítva) elhanyagolhatók (ideális gázok), ekkor a második tag nulla.

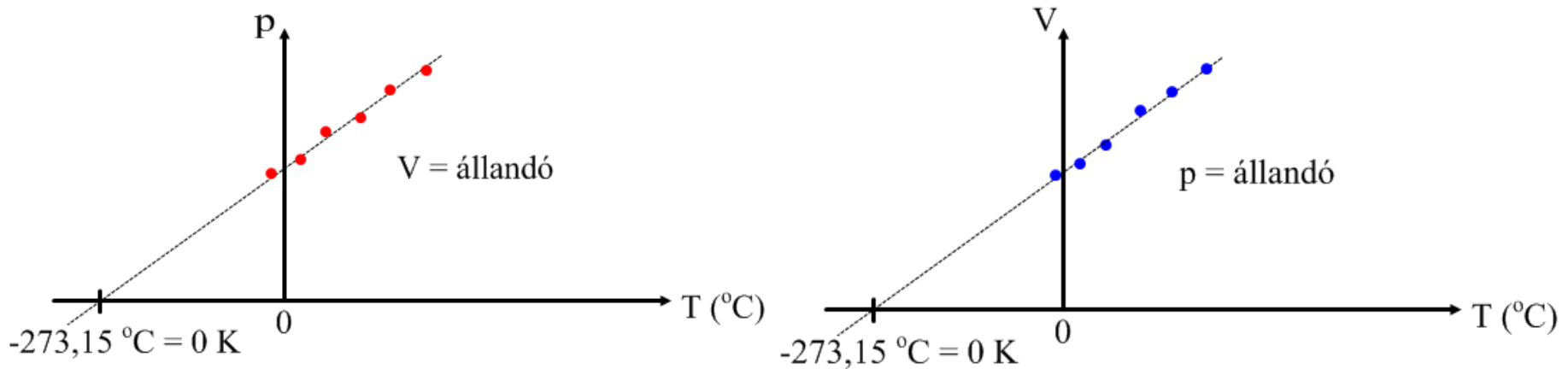
Magasabb hőmérsékleten a mozgás intenzívebb, így a belső energia nagyobb.

Rendezett mozgás mechanikai energiája disszipáció során (pl. súrlódás, közegellenállás) belső energiává alakulhat, növelve a test hőmérsékletét

Abszolút hőmérsékleti skála

Ideális gáz térfogatát tanulmányozva állandó nyomáson, vagy nyomását tanulmányozva állandó térfogaton, mindkét esetben a hőmérsékletnek lineáris függvénye az eredmény.

A gáz térfogata illetve nyomása lineárisan nullához tart csökkenő hőmérséklet esetén.



Abszolút nulla: ahol a lineáris extrapoláció egyenese metszi a hőmérséklet tengelyt.

$T = -273,15\text{ °C} = 0\text{ K}$ (Kelvin) - A hőmérséklet SI mértékegysége.

Az olvadó jég hőmérséklete (0 °C): 273 K (kerekítve)

A forrásban lévő víz hőmérséklete (100 °C): 373 K (kerekítve)

A különbség tehát kelvinben is ugyanannyi, mint Celsius fokokban!

Térfogati munka

A **térfogati munka** a környezet által a gázon (rendszeren) végzett munka, miközben annak térfogata változik.

Egy könnyen mozgó dugattyún végzett elemi munka a környezet által, miközben azt dx távolsággal beljebb nyomja: δW

A szükséges erő p nyomású gáz esetén: $F = pA$.

Tehát az elemi munkára: $\delta W = pAdx$
Mivel $Adx = -dV$

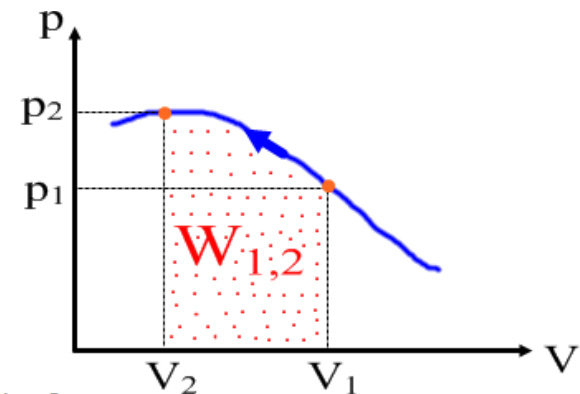
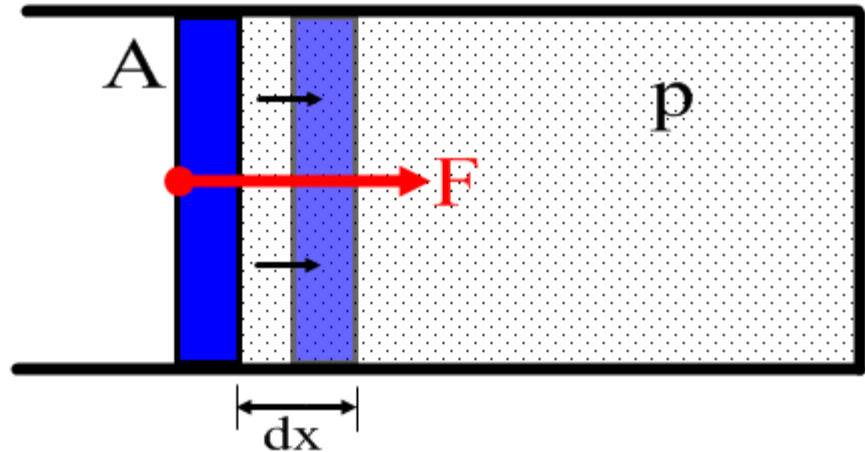
$$\delta W = -pdV$$

Eközben a gáz által végzett munka negatív, mert a gáz kifelé nyomja a dugattyút (az erő ellentétes az elmozdulás irányával): $\delta W_g = -\delta W$

Tágulás esetén viszont: $\delta W < 0$ és $\delta W_g > 0$

Egy véges térfogatváltozás esetén a

nyomás általában változik, ezért integrálni kell: $W_{1,2} = - \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV$
A munkát a p - V diagramon a görbe alatti terület reprezentálja.



ha a nyomás állandó:
 $W_{1,2} = -p(V_2 - V_1)$

Hőközlés

A test belső energiája úgy is nőhet, ha egy magasabb hőmérsékletű test energiát ad neki. Ez a makroszkopikus mozgás (munkavégzés) nélkül átadott energia a **hő**.

Jele: Q (az energia amit a rendszer a környezettől kap). Mértékegysége: J (Joule)

A rendszer (test, folyadék, gáz) által a környezetnek leadott energia pedig: $Q_{le} = -Q$

Hőközlés fajtái:

- **hővezetés** (a test anyagában vagy testek között érintkezés útján - pl. főzőlap)
- **konvekció** (a közeg áramlik és ezáltal az energiát is viszi magával - pl. központi fűtés)
- **hősugárzás** (mindenféle közeg nélkül, elektromágneses hullám formájában – pl. Nap)

Hőkapacitás: A rendszer hőmérsékletének 1 fokkal emeléséhez szükséges hő:

$$Q = C \cdot \Delta T \quad \text{Mértékegysége: } [C] = \text{J/K vagy J/}^\circ\text{C}$$

A hőkapacitás a rendszer egészét jellemzi, az anyagi minőségtől és mennyiségtől is függ.

Fajhő: a rendszer egységnyi tömegű részének hőkapacitása:

$$C = c \cdot m \quad \text{vagyis} \quad Q = c \cdot m \cdot \Delta T \quad \text{Mértékegysége: } [c] = \text{J/(kg} \cdot \text{K) vagy J/(kg} \cdot ^\circ\text{C)}$$

Mólhő: a rendszer egy mólnyi részének hőkapacitása:

$$C = c_M \cdot n \quad \text{ahol } n \text{ a mólok száma vagyis } Q = c_M \cdot n \cdot \Delta T$$

$$\text{Mértékegysége: } [c_M] = \text{J/(mol} \cdot \text{K) vagy J/(mol} \cdot ^\circ\text{C)}$$

A fajhő és mólhő már csak az anyagi minőségtől függő mennyiségek!

A belső energia a rendszer egy állapotát jellemzi, míg a munka és a hő egy folyamatot.

Kalorimetria

Kalorimetria: A hőmennyiség és a fajhő mérésére szolgáló eljárás.

Kaloriméter: Egy ismert hőkapacitású hőszigetelt tartály, benne ismert hőkapacitású folyadékkal.

Eljárás alapja: A rendszerben idővel kiegyenlítődik a hőmérséklet, **termikus egyensúly** áll be.

Zárt rendszer belső energiája állandó

Ha Q_i az i -edik test által kapott hőmennyiség:

$$\sum_{i=1}^N Q_i = 0$$

Q lehet:

$cm\Delta T$ (melegedés vagy hűlés)

$-mL_e$ (égés során leadott hő)

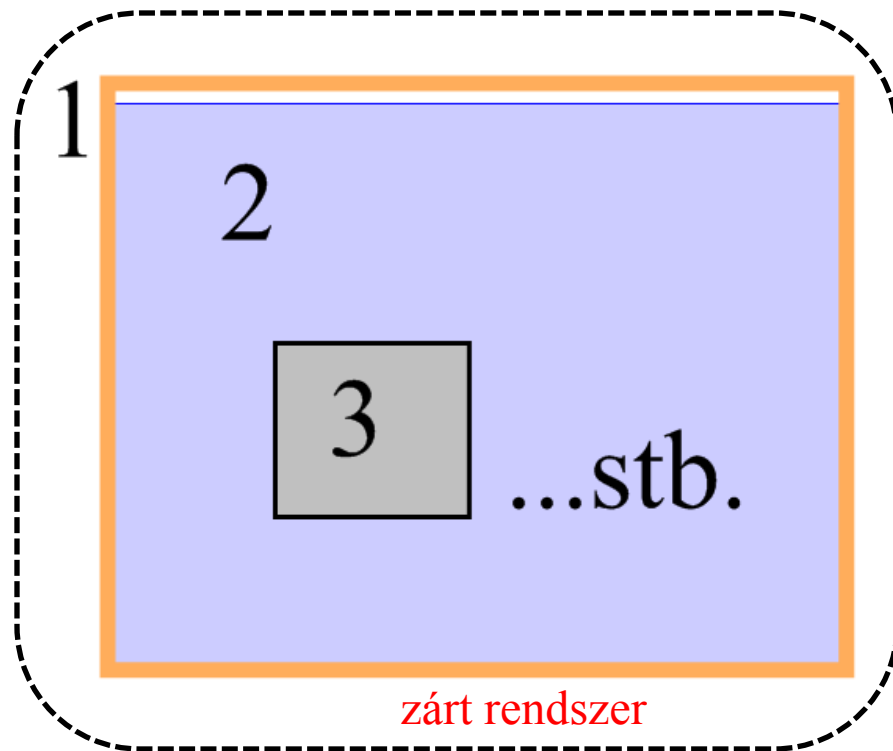
mL_o (olvadás során felvett hő)

$-mL_o$ (fagyás során leadott hő)

mL_f (forrás során felvett hő)

$-mL_f$ (lecsapódás során leadott hő)

fázisátalakulás során a hőmérséklet nem változik amíg az anyag egésze át nem alakul (olvadás- és forráspont).



Például három test esetén: $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$

ha nincs fázisátalakulás:

$$c_1 m_1 (T_k - T_1) + c_2 m_2 (T_k - T_2) + c_3 m_3 (T_k - T_3) = 0$$

Ha az egyik mennyiség (pl. c_3) ismeretlen, akkor az az egyenletből meghatározható.

A hőtán első főtétele

A **hőtán első főtétele** kimondja, hogy egy rendszer belső energiájának megváltozása egyenlő a **rendszerrel közölt hő** és a **rendszeren végzett munka** összegével:

$$\Delta E_b = Q + W$$

A munka a környezet által végzett térfogati munka.

A hő a környezettől kapott hő (lehet például súrlódás által disszipált mechanikai energia).

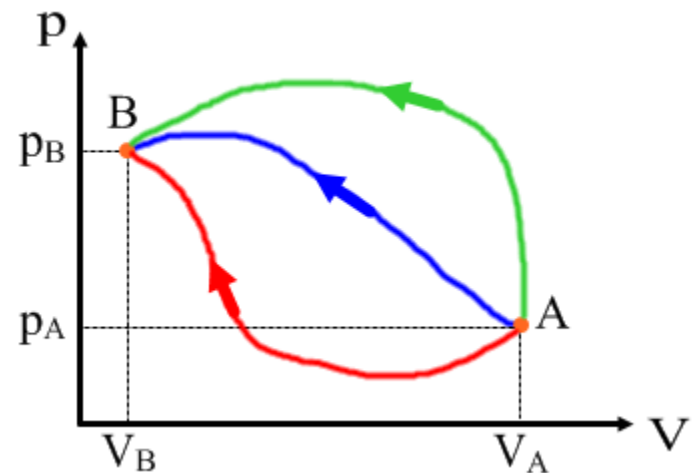
Mivel a belső energia a rendszer állapotára jellemző mennyiség, annak megváltozása egy A és B állapotok között nem függ attól, hogy milyen folyamat során történt a változás:

$$\Delta E_b = E_b(B) - E_b(A)$$

Bármilyen körfolyamat (A -ból kezdve és A -ban végződve) során természetesen:

$$\Delta E_b = E_b(A) - E_b(A) = 0$$

A tétel differenciális alakja: $dE_b = \delta Q + \delta W$

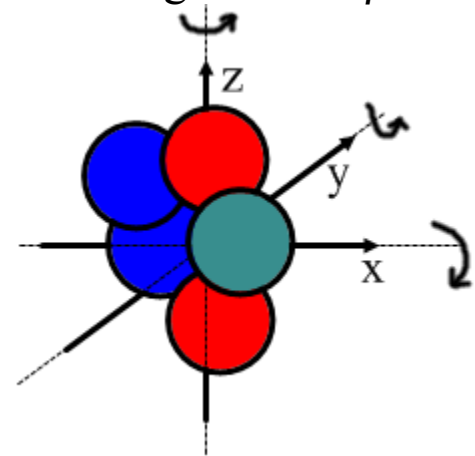
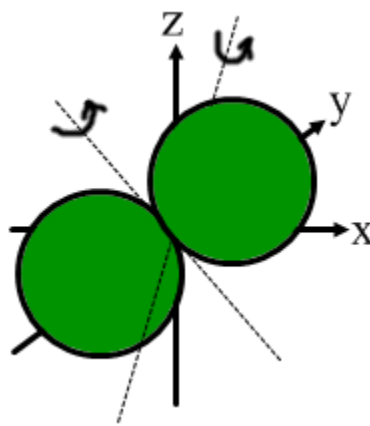
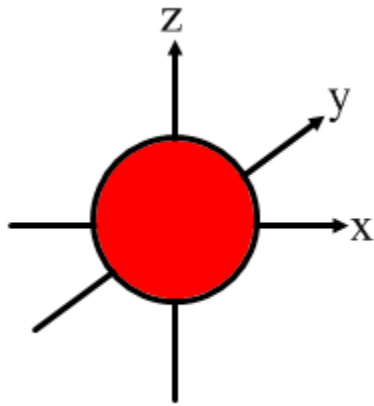


Ekvipartíció tétele

Kinetikus gázelmélet: Az ideális gáz nagyszámú, kisméretű részecskéből áll, amelyek időnként egymással és az edény falával rugalmasan ütköznek, de ezt leszámítva más kölcsönhatás nem lép fel közöttük. A részecskék mérete elhanyagolható a rendelkezésre álló térfogathoz képest.

Szabadsági fokok száma: (f) – Az egymástól független energiatárolási módok.

pl. mozgás x irányban, y irányban, z irányban (egyatomos gáz esetén) – $f = 3$ (1 részecskére!)
kétatomos molekulák a hossztengeleyükre merőleges két tengely körül foroghatnak is – $f = 5$
sokatomos molekulák három egymásra merőleges tengely körül foroghatnak – $f = 6$



Ekvipartíció tétele: Egyensúlyi rendszerben, egy adott hőmérsékleten minden rendelkezésre álló szabadsági fokra időátlagban jutó ε_f energia megegyezik.

Egy részecske egy szabadsági fokára: $\varepsilon_f = \frac{1}{2} kT$ $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ (Boltzmann-állandó)

Ideális gáz belső energiája

Ha az egy szabadsági fokra jutó energia átlagban $\varepsilon_f = \frac{1}{2}kT$, akkor egy részecskére átlagban $\bar{\varepsilon} = f \cdot \varepsilon_f = f \cdot \frac{1}{2}kT = \frac{f}{2}kT$ energia jut.

Ha a rendszer N db részecskéből áll, akkor a belső energia ennek egyszerűen az N -szerese:

$$E_b = \frac{f}{2}NkT = \frac{f}{2}nRT \quad \text{ahol } n = N / N_A \text{ és } R = kN_A$$

n : a mólok száma N_A : az Avogadro-szám $R = 8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ az egyetemes gázállandó.

A belső energia tehát csak a hőmérséklettől függ (adott mennyiségű és típusú gáz esetén).

Annak a testnek magasabb a hőmérséklete, ahol az egy szabadsági fokra jutó energia több.

A belső energia megváltozása tehát: $\Delta E_b = \frac{f}{2}Nk\Delta T = \frac{f}{2}nR\Delta T$

Egyatomos gáz esetén a 3 független energia tag: $\frac{1}{2}mv_x^2, \frac{1}{2}mv_y^2, \frac{1}{2}mv_z^2$

Ideális gázok állapotegyenlete

Állapotegyenlet: Ideális gáz minden állapotában, az állapotváltozók között érvényes a következő összefüggés:

$$pV = NkT \quad \text{vagy} \quad pV = nRT$$

Ennek felhasználásával a belső energia: $E_b = \frac{f}{2}NkT = \frac{f}{2}nRT = \frac{f}{2}pV$

Abban az esetben, ha a gáz mennyisége állandó ($N = \text{állandó}$, vagy $n = \text{állandó}$), az állapotegyenletből megkapjuk az **egyesített gáztörvényt**.

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

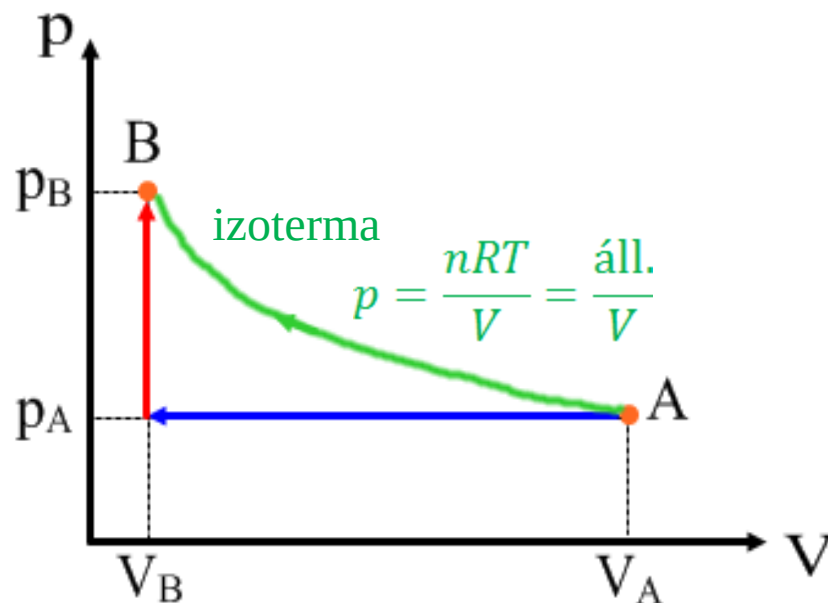
Ideális gázok speciális állapotváltozásai

Gáz mennyisége mindig adott, tehát $n = \text{áll!}$

- izobár: a nyomás is állandó ($pV = nRT$)
($V/T = \text{áll.}$ $W = -p\Delta V = -nR\Delta T$)

- izochor: a térfogat is állandó ($pV = nRT$)
($p/T = \text{áll.}$ $W = 0$)

- izoterm: a hőmérséklet is állandó ($pV = nRT$)
($pV = \text{áll.}$)



$$\delta W = -pdV$$

$$\begin{aligned} W &= - \int_{V_1}^{V_2} p dV = -nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -nRT [\ln V]_{V_1}^{V_2} = \\ &= -nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = nRT \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right) = p_1 V_1 \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right) \end{aligned}$$

- adiabatikus: a közölt hő nulla $Q = 0$ (később...)

Példa: 9

Izobár és izochor mólhő

A belső energia megváltozása izochor folyamat esetén ($V = \text{állandó}$, így $W = 0$):

$$Q = c_{MV} n \Delta T \qquad \Delta E_b = \frac{f}{2} n R \Delta T = Q \quad \textbf{izochor mólhő: } c_{MV} = \frac{f}{2} R$$

A belső energia megváltozása izobár folyamat esetén:

$$\Delta E_b = \frac{f}{2} n R \Delta T = Q + W = Q - p \Delta V = Q - n R \Delta T$$

$$\frac{f}{2} n R \Delta T + n R \Delta T = Q$$

$$Q = c_{Mp} n \Delta T \qquad Q = \left(\frac{f}{2} + 1 \right) n R \Delta T \quad \textbf{izobár mólhő: } c_{Mp} = \left(\frac{f}{2} + 1 \right) R$$

A két mólhő hányadosa (fajhők hányadosa) az **adiabatikus kitevő**:

$$\kappa = \frac{c_{Mp}}{c_{MV}} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\frac{f}{2} + 1}{\frac{f}{2}} = \frac{f + 2}{f} \qquad \kappa = \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{4}{3}$$

Adiabatikus állapotváltozás

A folyamat során a hőátadás nulla: $Q = 0 \rightarrow \Delta E_b = W$

A belső energia megváltozása: $dE_b = \delta W \rightarrow \frac{f}{2} nRdT = -pdV$

Mivel: $nRT = pV \rightarrow nRdT = pdV + dpV$

$$\frac{f}{2} (pdV + dpV) = -pdV$$

$$\frac{f}{2} pdV + p dV = -\frac{f}{2} V dp$$

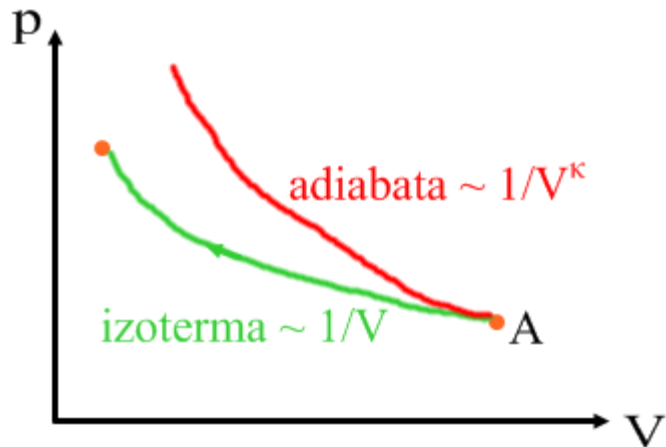
$$\left(\frac{f}{2} + 1\right) \frac{dV}{V} = -\frac{f}{2} \frac{dp}{p}$$

$$\kappa \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p} \rightarrow \kappa \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}$$

$$\kappa \cdot [\ln V]_{V_1}^{V_2} = -[\ln p]_{p_1}^{p_2}$$

$$\kappa \cdot \ln \left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \ln \left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\kappa = \frac{p_1}{p_2}$$

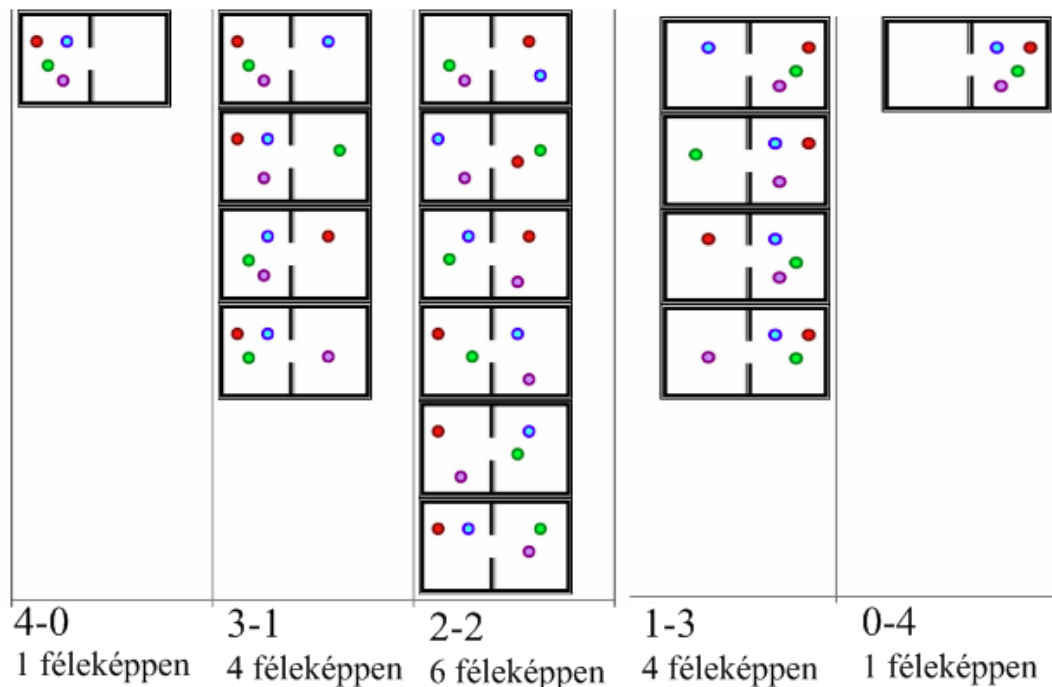


Első Poisson-egyenlet:

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa$$

Mikroállapotok, állapotösszeg, entrópia *

A rendszer egy makroszkopikusan mérhető és megkülönböztethető állapotát többféle mikroszkopikus elrendeződés (általunk nem észlelhető mikroszkopikus különbségeket, pl. két ugyanolyan atom felcserélése a tartályban, is figyelembe vevő állapot) is létrehozhatja.



Példa 4 db ugyanolyan részecskével:

mikroállapot:

melyik részecske melyik oldalon

makroállapot:

hány részecske egy oldalon

állapotösszeg: Y

egy makroállapothoz

tartozó mikroállapotok száma

(hányféleképpen valósulhat meg)

Már 4 db részecskénél is látható, hogy a legvalószínűbb elrendeződés az egyenlően eloszló részecskéket jelenti. Ez óriási számú részecskék esetén sokkal dominánsabb.

Entrópia (rendezetlenség): $S = k \ln Y$ $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K (Boltzmann-állandó)

Ha a rendszer T hőmérsékleten δQ hőt kap, akkor az entrópiájának megváltozása:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

Körfolyamatok

A körfolyamatok közös tulajdonsága, hogy bármennyi és bármilyen részfolyamatokból is álljanak, a ciklus végén a rendszer (gáz, munkaközeg) visszakerül a kiindulási állapotba. Mivel a belső energia (E_b) és az entrópia (S) mennyiségeket a rendszer állapota határozza meg, azok értéke a ciklus végén szintén ugyanannyi lesz, mint az elején.

Ebből az következik, hogy a teljes ciklusra a belső energia változása és az entrópia változása zérus. A részfolyamatokban ezek a mennyiségek úgy változnak meg, hogy a teljes ciklusra a változások összege nullának adódik:

$$\Delta E_{bO} = \Delta E_{b1} + \Delta E_{b2} + \dots + \Delta E_{bn} = 0 \quad \text{és} \quad \Delta S_O = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots + \Delta S_n = 0$$

Az O karakter az alsó indexben ΔE_{bO} és ΔS_O esetén a teljes körfolyamatra (ciklusra) vett értéket jelöli.

A **hőtan első főtételét** minden részfolyamatra felírhatjuk, tehát ezen egyenleteket összeadva a teljes ciklusra is nyugodtan írhatjuk, hogy

$$0 = \Delta E_{bO} = Q_O + W_O \rightarrow Q_O = -W_O$$

Itt a Q_O mennyiség a rendszer (gáz, munkaközeg) által **kapott nettó hő** a ciklus során:

$$Q_O = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

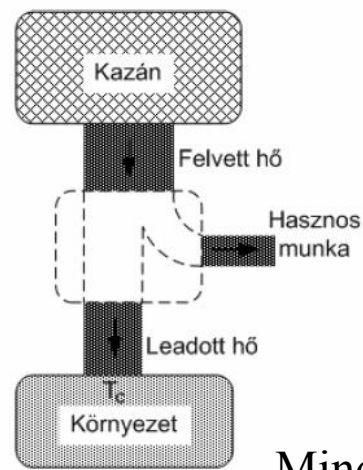
A W_O mennyiség pedig a **rendszeren végzett nettó munka** a ciklus során:

$$W_O = W_1 + W_2 + \dots + W_n$$

A **gáz által** a ciklus során **leadott** hőre természetesen: $Q_{leO} = -Q_O$

A **gáz által** a ciklus során **végzett** munkára pedig: $W_{gO} = -W_O$

Hőerőgép



A hőtan I. főtételéből továbbra is: $0 = \Delta E_{bO} \rightarrow Q_O = -W_O = W_{gO}$
 Ennek, vagyis az energiamegmaradás törvényének megfelelően, a munkaközeg a kazántól (meleg hőtartálytól) felvett hő és a környezetnek (vagy hideg hőtartálynak) leadott hő különbségeként adódó nettó felvett hőnek megfelelő hasznos munkát végez minden ciklus alatt (lásd ábra):

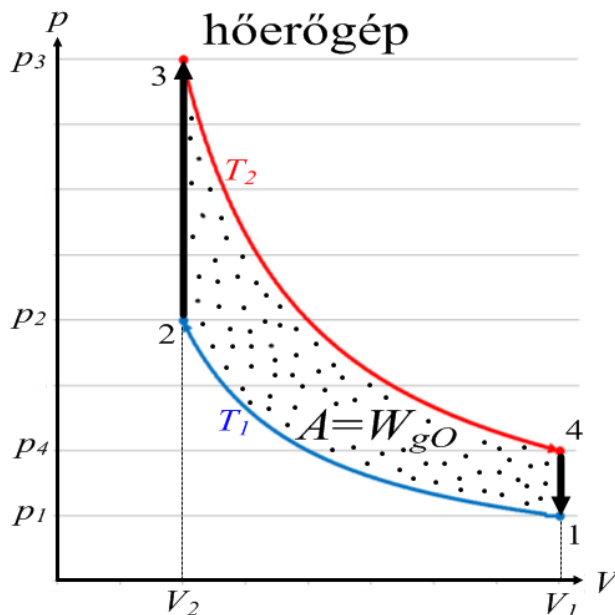
$$W_{gO} = W_{hasz} = Q_{felv} - Q_{lead} = Q_O$$

Mind a meleg, mind a hideg hőtartály hőkapacitását végtelennek tekintjük, tehát azok hőmérséklete végig állandó.

Tehát a hőerőgép a felvett hőt alakítja mechanikai munkavégzéssé, valamilyen η hatásfokkal:

$$\eta = \frac{W_{hasz}}{Q_{felv}} = \frac{Q_{felv} - Q_{lead}}{Q_{felv}} = 1 - \frac{Q_{lead}}{Q_{felv}}$$

Példa: 10



Ezen az egyszerű példán egy T_1 hőmérsékleten végzett izoterm kompresszió, egy V_2 térfogaton végzett izochor melegítés, egy T_2 hőmérsékleten zajló izoterm expanzió, és egy V_1 térfogaton történő izochor hűlés alkotja a ciklust. Látható, hogy a hasznos munka két részből tevődik össze:

$$W_{hasz} = W_{g12} + W_{g34}$$

Az első tag negatív, abszolút értéke pedig az 1-es izoterma alatti terület. A második tag pozitív, értéke a 2-es izoterma alatti terület. Tehát a **bezárt terület** megadja a hasznos munkát. Ez tetszőleges hőerőgép körfolyamatára igaz, nem csak itt!

Hűtőgépek, hőszivattyúk *

A hőtan I. főtételéből itt is: $0 = \Delta E_{bO} \rightarrow Q_O = -W_O \rightarrow Q_{leO} = W_O$

Ennek, vagyis az energiamegmaradás törvényének megfelelően, a munkaközeg a hideg hőtartálytól hőt von el és azt, valamint a motor által a ciklus közben rajta végzett nettó munkából származó energiát hő formájában leadja a meleg hőtartálynak minden ciklus alatt (lásd ábra):

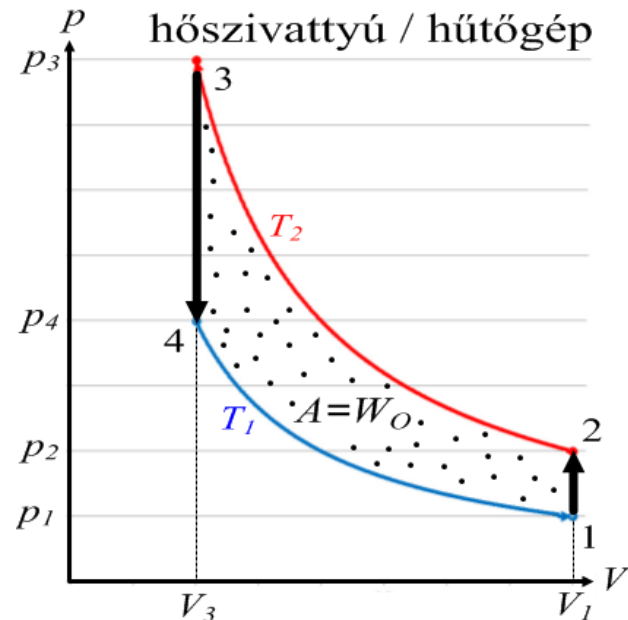
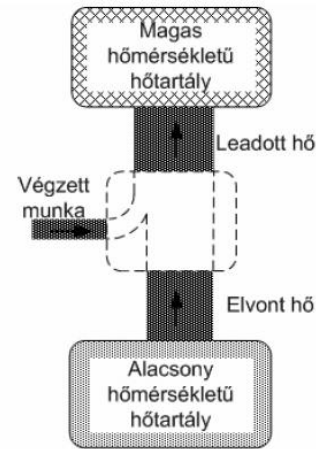
$$Q_{lead} = Q_{elv} + W_O \quad \text{ahol a nettó leadott hő: } Q_{leO} = Q_{lead} - Q_{elv}$$

A meleg és hideg hőtartály hőkapacitását itt is végtelennek tekintjük.

A hűtőgép és hőszivattyú működési elve ugyanaz, de a feladatuk különböző.

A hűtőgépnél a kívánatos folyamat a hő elvonása a hideg tartálytól (hűtő).

A hőszivattyúnál a kívánatos folyamat a hő leadása a meleg hőtartálynak (pl. fűtendő szoba).



Itt hatásfok helyett jósági tényezőket tudunk definiálni.

$$\text{Hűtőgép: } q_{hg} = \frac{Q_{elv}}{W_O} = \frac{Q_{elv}}{Q_{lead} - Q_{elv}}$$

$$\text{Hőszivattyú: } q_{hsz} = \frac{Q_{lead}}{W_O} = \frac{Q_{lead}}{Q_{lead} - Q_{elv}}$$

A körfolyamat állapotai ugyanazok, mint az előző dián a hőerőgépnél, de **fordított** irányban megyünk végig rajtuk. Ezért a motor által végzendő nettó munka lesz pozitív, és ez fog most megegyezni a görbe által bezárt területtel:

$$W_{motor} = W_O = W_{23} + W_{41} \quad W_{23} > 0 \quad W_{41} < 0$$

A hőtan második főtétele

Vannak olyan folyamatok amik nem megfordíthatók, **irreverzibilisek**.
példák:

- hővé alakult mozgási energia nem alakul vissza
- összetört pohár nem pattan épségben vissza
- üres részhez nyitott gáz molekulái nem fognak mind visszajönni az eredeti kamrába



Ezeket a folyamatokat a fizika törvényei nem tiltják, viszont elenyésző a valószínűségük. Ezért statisztikailag kimondható, hogy a folyamatok csak olyan irányba mehetnek végbe, amivel **a rendezetlenség nő**. A rendezetlenség mértéke az **entrópia**. Lokálisan csökkenthető az entrópia, de csak annak árán, ha máshol viszont nő. A világegyetem entrópiája tehát folyamatosan nő.

Hőtan második főtétele: nem lehet olyan gépet készíteni, amely egyetlen tartály lehűlése árán munkát végezne (kell egy hideg tartály is). Ez a **másodfajú örökmozgó**.

Másik megfogalmazás: Zárt rendszer entrópiája sohasem csökkenhet.

$$\Delta S \geq 0$$

Megfordítható folyamatok esetén a rendezetlenség változatlan.
pl. rugalmas ütközés, adiabatikus állapotváltozás