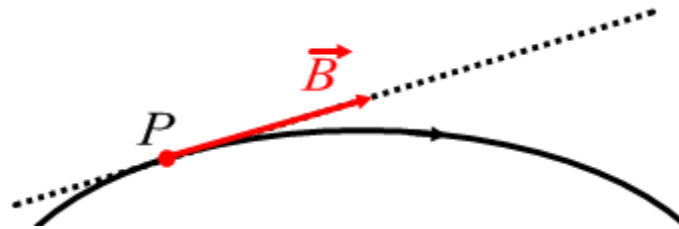


Mágneses-indukciófluxus

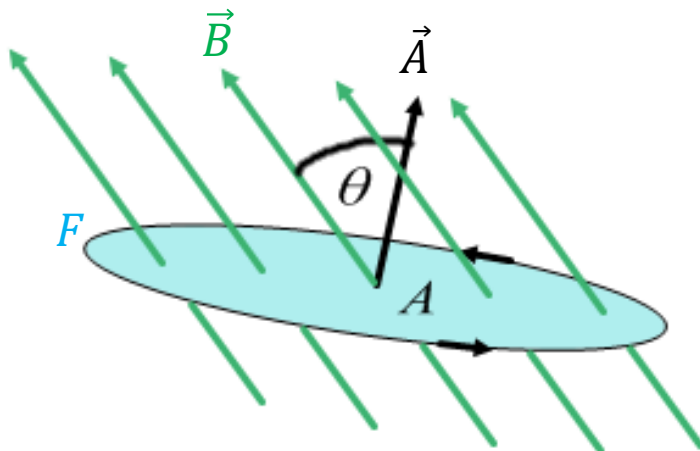
A mágneses mező szemléltetésére a mágneses **indukcióvonalakat** használjuk. Ezek olyan irányított görbék, amelyeknek érintője egyirányú az érintési pontbeli mágneses indukcióvektorral.



A mágneses indukció nagyságát az indukcióvonalak sűrűsége jellemzi.

A vonalakra merőlegesen állított egységnyi felületen éppen annyi indukcióvonal halad át, mint amennyi ott az indukció mérőszáma.

Mágneses-indukciófluxus: Megadja a felületet átdöfő indukcióvonalak előjeles számát.



Ha az indukció a felület mentén homogén:

$$\Phi = BA \cos \theta = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

Mértékegysége: $\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \text{m}^2 = \text{Vs} = \text{Wb}$ (weber)

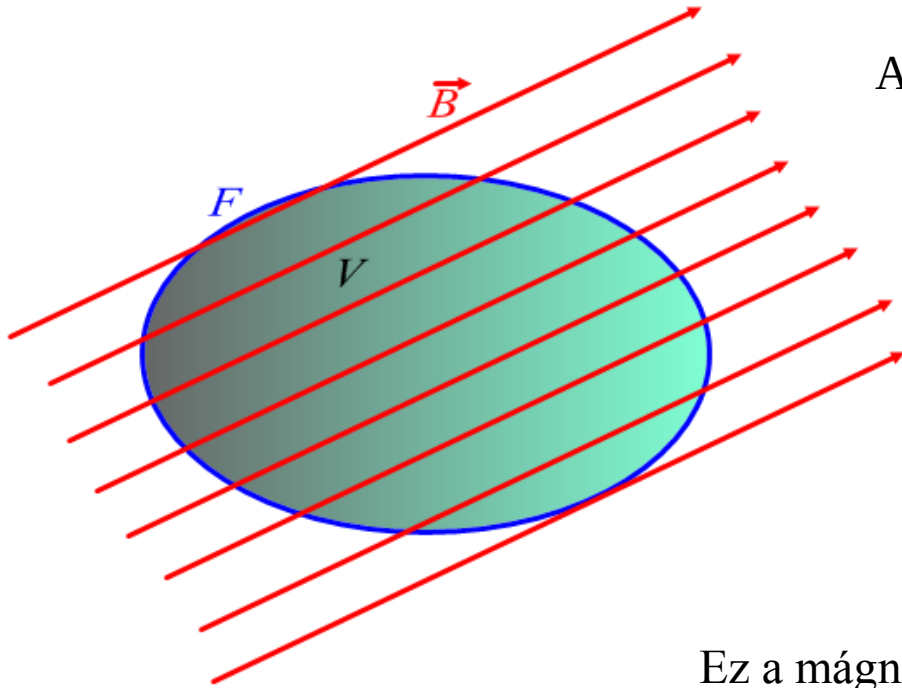
Ha nem homogén az indukció, és/vagy nem sík a felület, akkor a felületet kicsi darabokra bontjuk és a járulékokat összegezzük:

$$\Phi = \int_F \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Mágneses Gauss-törvény

Mivel mágneses töltések (monopólusok) nem léteznek (a térnek nincsenek forrásai), így a zárt felületre számított mágneses-indukciófluxus zérus. A térfogatba bemenő indukcióvonalak száma megegyezik a kijövő vonalak számával.

A mágneses Gauss-törvény integrális alakja:
$$\oint_F \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$



A Gauss-Osztogradszkij tétel alkalmazásával:

$$0 = \oint_F \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV$$

Mivel ez egy tetszőleges P pont körüli tetszőlegesen kicsi térfogatra igaz, csak úgy teljesülhet, ha a tetszőleges P pontban:

$$\operatorname{div} \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Ez a mágneses Gauss-tétel differenciális (lokális) alakja. A mágneses tér forráserőssége bármely pontban nulla.

A mágneses indukcióvonalaknak nincs kezdetük és nincs végük, önmagukba záródnak. A mágneses tér forrásmentes, viszont örvényes.

Mágnesezettség és mágneses térerősség

Az anyagok mágneses tulajdonságai túlnyomó részben az elektronok mágneses dipól-momentumára vezethetők vissza:

1. Az atommag körül mozgó elektron kicsiny köráramnak tekinthető
2. Saját mágneses momentuma is van ami a spinből adódik

A mágneses polarizáció során ezek az atomi dipólmomentumok igyekeznek egy irányba (külső tér irányába) beállni és ezáltal erősíteni egymás hatását.

A **mágnesezettség** vektor a P pontban megadja az egységnyi térfogatra jutó mágneses dipólmomentumot:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \vec{m}_i}{\Delta V} \quad [M] = \frac{\text{Am}^2}{\text{m}^3} = \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

A **mágneses térerősség** a $\vec{B}$ és az $\vec{M}$ vektorok lineáris kombinációjaként definiált:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad [H] = [M] = \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

ahol $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ a vákuum permeabilitása.

Anyagegyenlet

Az anyagegyenlet megadja az $\vec{M}$ mágnesezettség és a mágnesező tér $\vec{B}$ indukciója közötti kapcsolatot. Első közelítésben lineáris kapcsolatot feltételezünk.

Amennyiben $\vec{B} \sim \vec{M}$ akkor $\vec{H} \sim \vec{M}$ is igaz. Legtöbb izotróp közegben a lineáris anyagegyenlet teljesül, vagyis $\vec{H} \parallel \vec{M}$ és $\vec{H} \sim \vec{M}$

Az arányossági tényező a χ mágneses szuszceptibilitás: $\vec{M} = \chi \vec{H}$

Ezt felhasználva a mágneses indukcióra:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(\vec{H} + \chi \vec{H}) = \mu_0(\chi + 1)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H}$$

Ahol $\mu_r = \chi + 1$ a relatív permeabilitás, és

a $\mu = \mu_0\mu_r$ az abszolút permeabilitás.

Az Ampère-féle gerjesztési törvény

Mozgó töltések (áramok) mágneses teret hoznak létre.

Vékony vonalas vezetőkre a mágneses térerősség zárt görbére vett integrálja egyenlő a görbe által határolt tetszőleges felületen áthaladó áramok előjeles összegével.

$$\oint_G \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_i I_i$$

A normális irányába átfolyó áram **pozitív**.

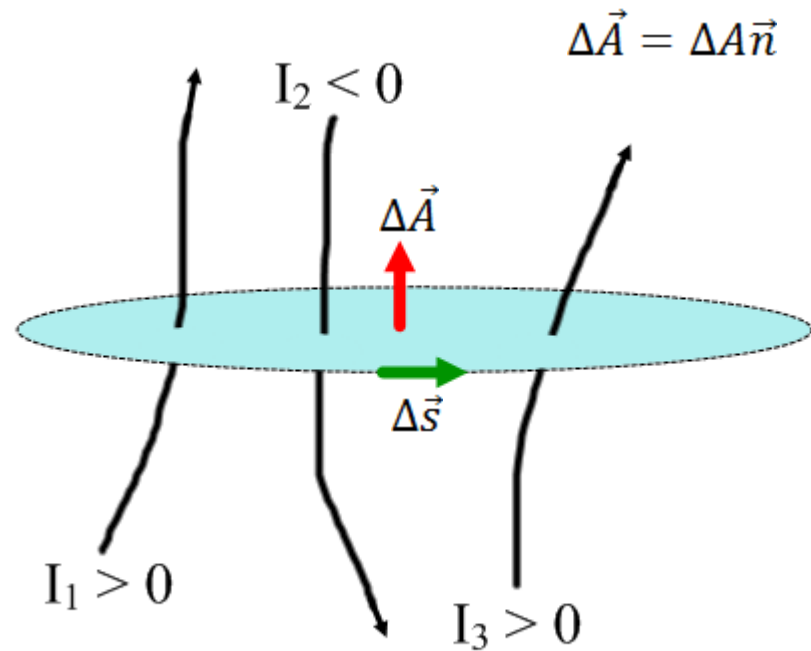
$\Delta\vec{s}$ és $\vec{n}$ irányát a jobbszavar szabály kapcsolja össze.

A felületen átfolyó áram általánosan:

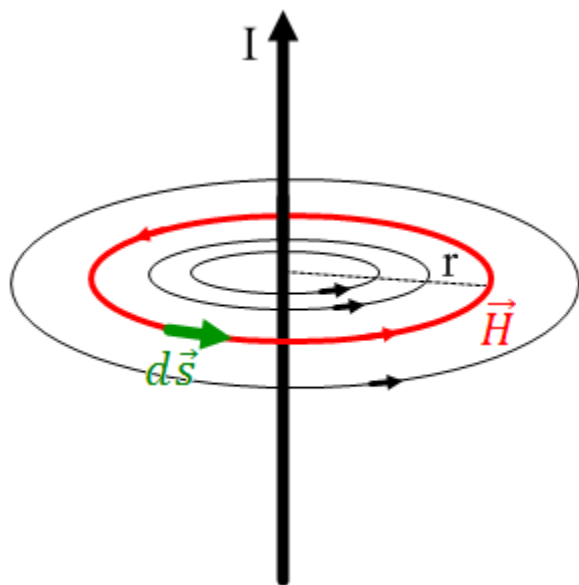
$$\oint_G \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_F \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

Innen az Ampère-féle gerjesztési törvény differenciális (lokális) alakja:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j}$$



Alkalmazás: végtelen egyenes vezető tere



$$\oint_G \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$$

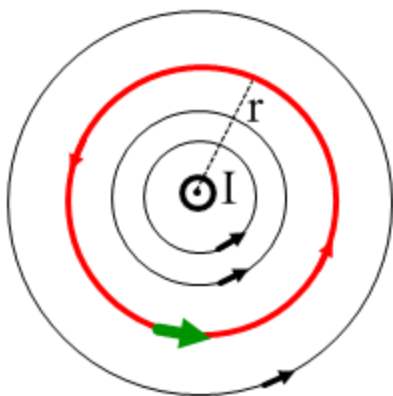
Hengerszimmetria miatt: A térerősség nagysága csak az r távolságtól függ, iránya pedig tangenciális.

$$d\vec{s} \parallel \vec{H}$$

Tehát:
$$\oint_G \vec{H} \cdot d\vec{s} = H \oint_G ds = H 2r\pi$$

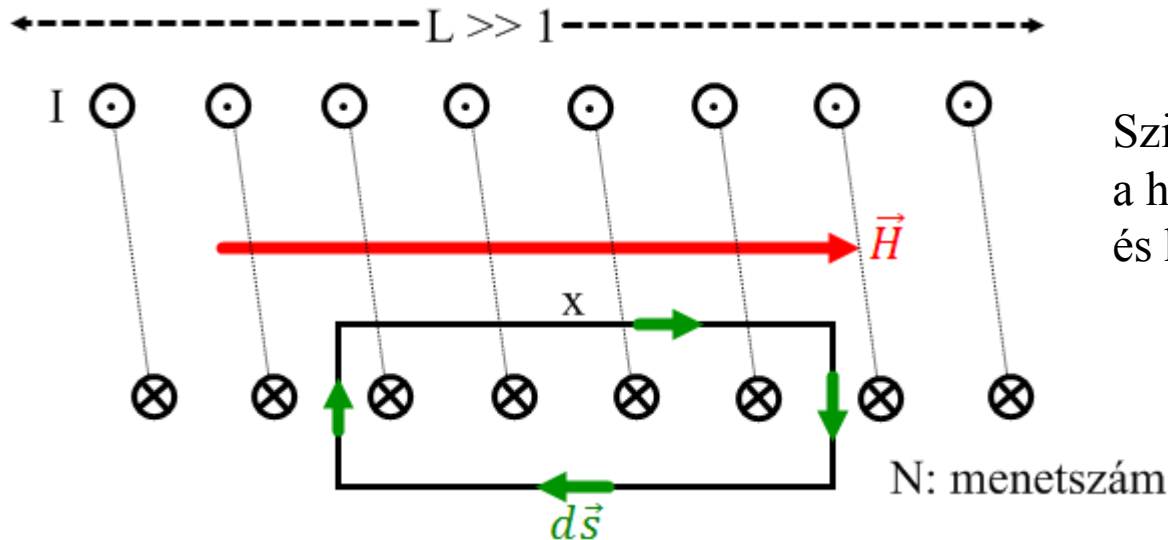
$$H 2r\pi = I$$

$$H = \frac{I}{2r\pi}$$



Vákuumban vagy levegőben pedig:
$$B = \frac{\mu_0 I}{2r\pi}$$

Alkalmazás: „végtelen” hosszú egyenes tekercs tere



Szimmetria miatt: A térerősség a hossztengellyel párhuzamos, és homogén. Kívül nulla.

$$\oint_G \vec{H} \cdot d\vec{s} = Hx$$

$$Hx = \frac{NIx}{L}$$

$$H = \frac{NI}{L}$$

$$\sum_i I_i = \frac{NI}{L} x$$

Vákuumban vagy levegőben pedig: $B = \mu_0 \frac{NI}{L}$

Ha a tekercsben valamilyen más anyag van: $B = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{L}$

Elektromágneses indukció

Az elektromágneses indukció jelensége

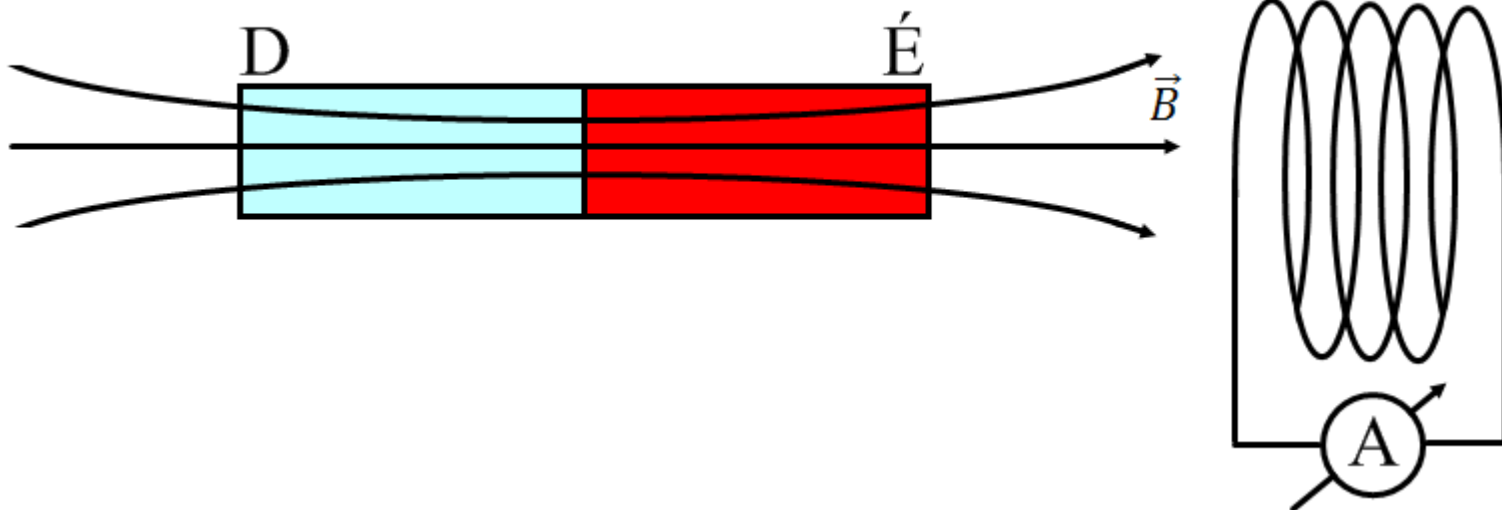
Korábban láttuk, hogy az elektromos áram hatására mágneses tér keletkezik (Ampère-féle gerjesztési törvény)

Kérdés, hogy vajon ez megfordítható-e, és a mágneses tér hatására keletkezhet-e áram:

Ha egy tekercs állandó mágneses térben nyugalomban van akkor semmi nem történik.

Viszont az árammérő kilendül akkor amikor:

- a tekercset vagy a mágnest mozgatjuk (egymáshoz képest), illetve forgatjuk.
- elektromágnes esetén amikor a teret ki- vagy bekapcsoljuk.



Mozgási indukció

Ha egy vezetőt mágneses térben mozgatunk akkor a benne lévő töltésekre Lorentz-erő hat.

Ez az az idegen erő amely a töltések mozgatásáért felelős: $\vec{F}_* = \vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$

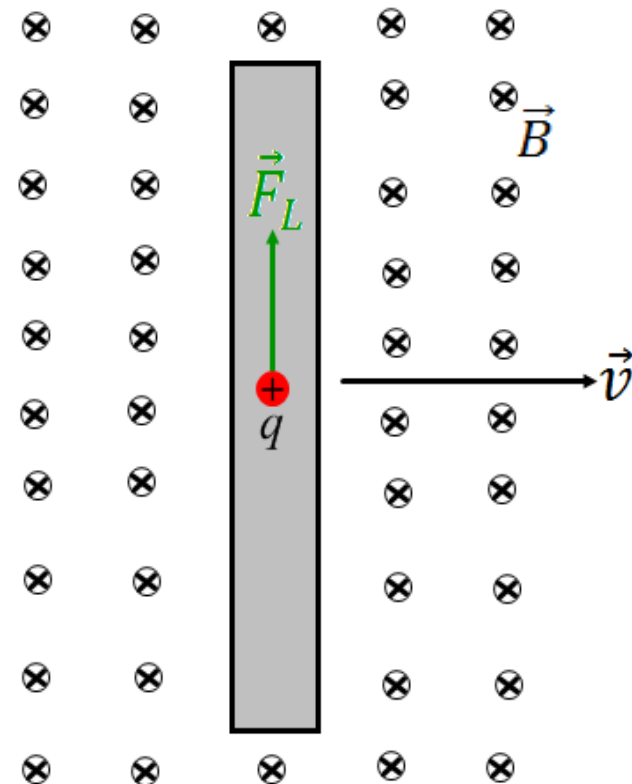
Tehát az idegen térerősség: $\vec{E}_* = \frac{\vec{F}_*}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$

A **Neumann-törvény** megadja a mozgó vezető A és B pontja között indukálódó elektromotoros erőt amint az a mágneses térben mozog:

$$\varepsilon_{AB} = \int_A^B \vec{E}_* \cdot d\vec{s} = \int_A^B (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

Ebben a jobbra látható egyszerű esetben, ha a rúd hossza l , az elektromotoros erő:

$$\varepsilon = vBl$$



Alkalmazás: Lineáris generátor

Ha a mágneses térben mozgó vezető végeit összekötjük egy párhuzamos sínpárral egy R ellenálláson keresztül, akkor a körben áram folyik.

Az áramerősség:
$$I = \frac{\varepsilon_{AB}}{R} = \frac{vBl}{R}$$

Az áramjárta vezetőre hat az Ampère-erő amit egy húzóerővel kell kompenzálnunk.

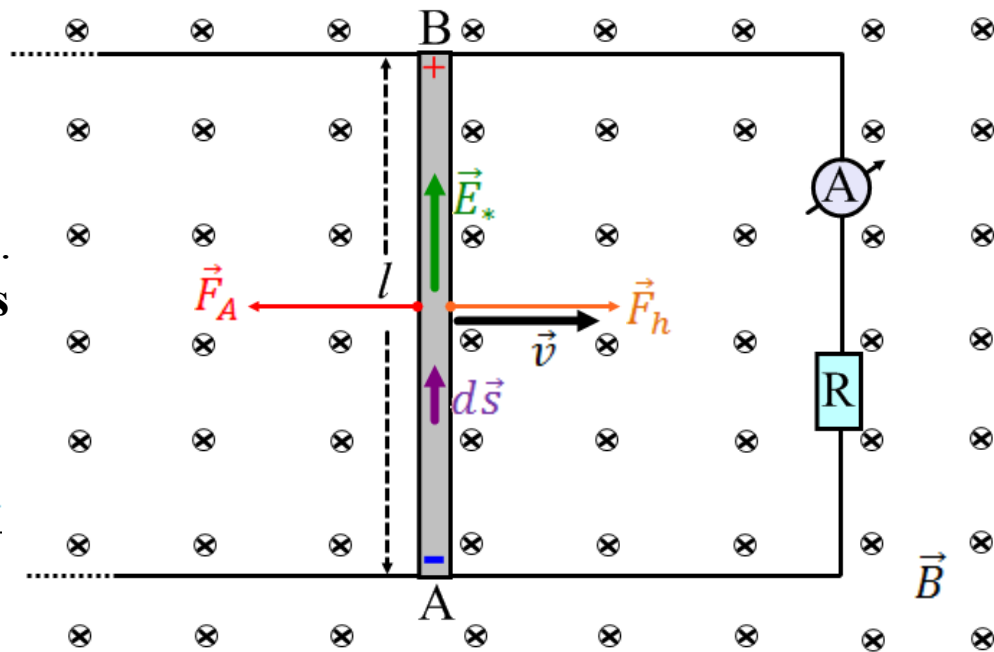
Mechanikai teljesítményből elektromos teljesítmény a fogyasztón.

Legyen h a mozgó rúd és az ellenállás közötti távolság. Ekkor: $v = -\frac{dh}{dt}$

A **mágneses indukciófluxus** ebben az egyszerű esetben: $\Phi = BA = Blh$

A mágneses indukciófluxus időderiváltja pedig:
$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(BA)}{dt} = B \frac{dA}{dt} = -Blv = -\varepsilon_{AB}$$

Faraday és Lenz törvénye: $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$



Példa: 18

Zárt vezetőhurokban indukált elektromotoros erő egyenlő a hurok által körülfogott mágneses indukciófluxus változási gyorsaságának ellentettjével (másképpen az Ampère-erő segítene!)

Alkalmazás: Váltakozó áramú generátor

Vezető keret állandó ω szögsebességgel forog egy homogén mágneses térben.

Ha kezdetben $\vec{n} \parallel \vec{B}$ akkor: $\alpha = \omega t$

A mágneses indukciófluxus az idő függvényében:

$$\Phi = \int_F \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA \cos \alpha = BA \cos \omega t$$

A Faraday-Lenz törvényt felhasználva:

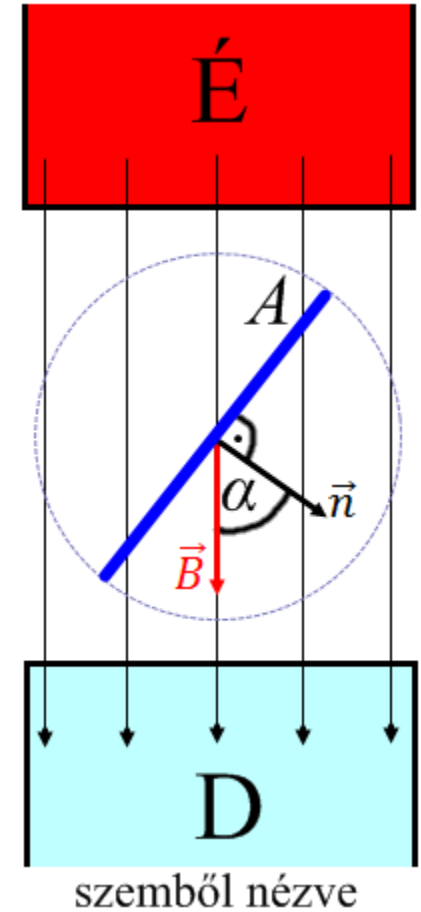
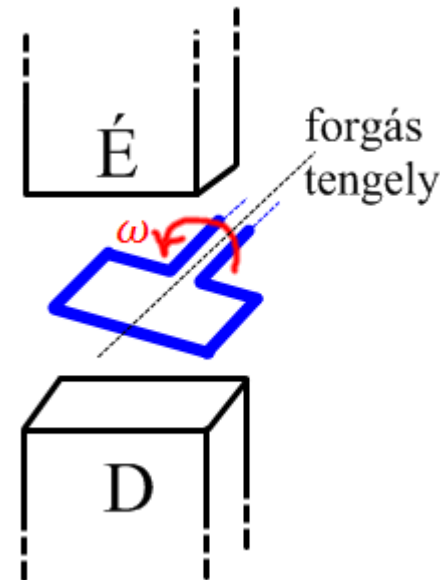
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = BA\omega \sin \omega t$$

Ha a keret N menetből áll:

$$\varepsilon = NBA\omega \sin \omega t$$

Az elektromotoros erő maximális értéke: $\varepsilon_0 = NBA\omega$

Tehát az indukált elektromotoros erő: $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$



[ANIMÁCIÓ!](#)

Példa: 19

A feszültség és áramerősség effektív értéke

A váltakozó áram effektív értéke a hőhatás szempontjából egyenértékű stacionárius (egyen-) áramot jelent.

Tehát egy periódusidő alatt a fogyasztón az elektromos munkavégzés megegyezik:

$$I_{eff}^2 RT = \int_0^T I^2 R dt$$

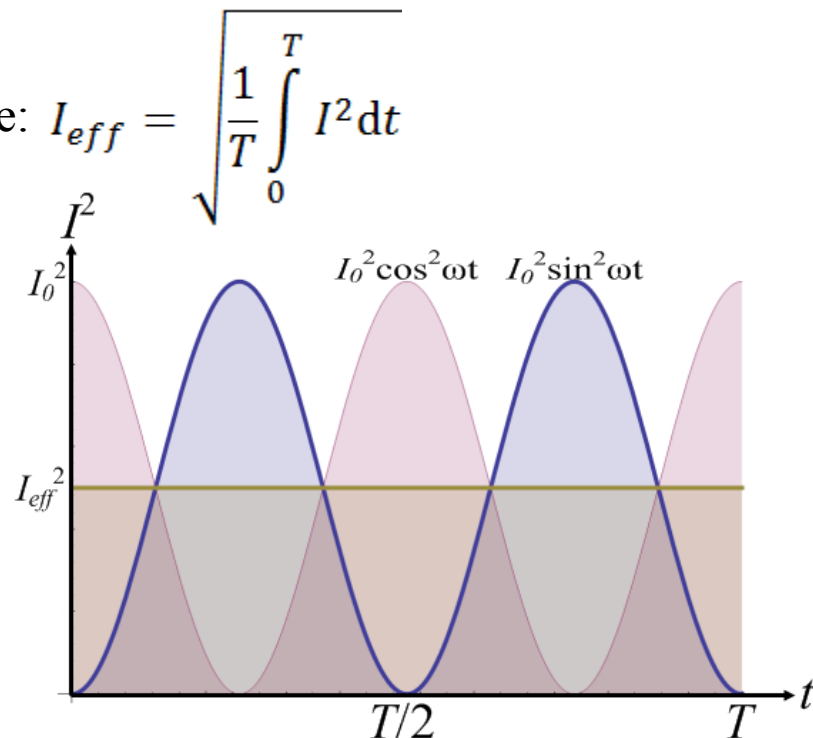
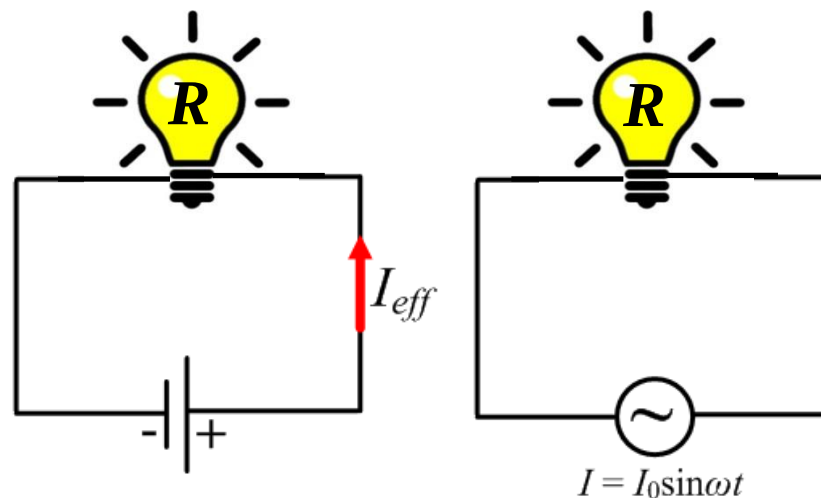
Innen R -el egyszerűsítve az effektív áramerősségre: $I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt}$

Szinuszosan változó áramra:

$$\int_0^T I_0^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{I_0^2}{2} \int_0^T 1 dt = \frac{I_0^2 T}{2}$$

Tehát az effektív értékekre:

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad (U = IR)$$



Nyugalmi indukció - Kölcsönös indukció

Láttuk, hogy a mágneses indukciófluxus változása elektromotoros erőt indukál.

A fluxus változhat azért, hogy:

- változik vagy elfordul a felület (mozgási indukció)
- a mágneses indukció változik (nyugalmi indukció)

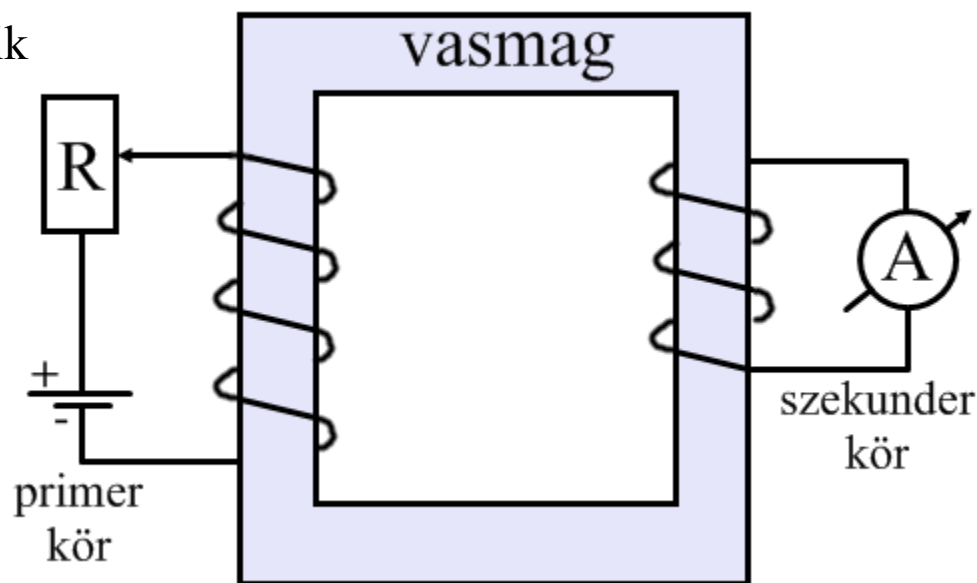
$$\Phi = \int_F \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

A változtatható ellenállást állítgatva változik az áramerősség és ezáltal a mágneses indukció. Tehát változik a mágneses indukciófluxus. A vasmag biztosítja, hogy a kialakuló indukcióvonalakat szinte teljes mértékben körülfogja a szekunder tekercs. Amíg a fluxus változik addig a szekunder körben áram folyik.

A magyarázat most nem a Lorentz-erő, hisz a szekunder kör nem mozog.

Az **időben változó mágneses tér elektromos teret indukál** és ez mozgatja a szekunder körben a töltéseket.

Ezt a jelenséget **kölcsönös indukciónak** is nevezzük.

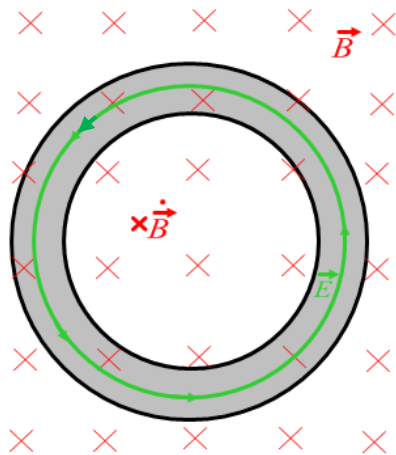


Példa: 20

Nyugalmi indukció - Önindukció

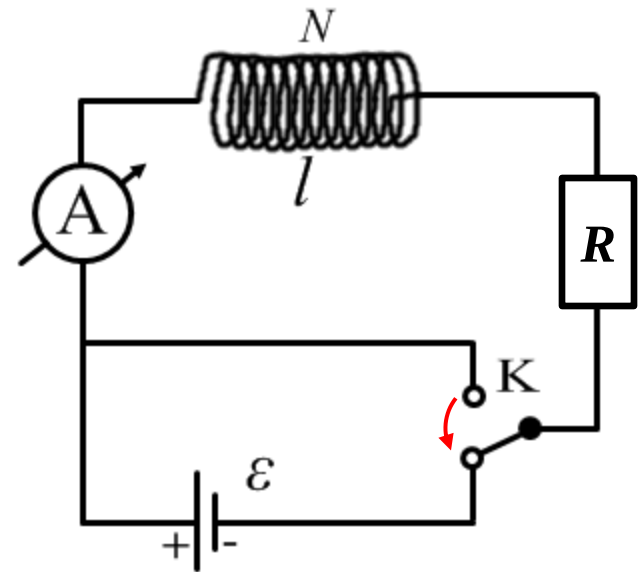
A kapcsoló segítségével a feszültséget ráadhatjuk a tekercsre. Be- és kikapcsolásnál az áramerősség nem ugrásszerűen változik. A változó áram változó mágneses teret kelt, ami egy változó fluxust okoz. Az indukált elektromotoros erő az őt létrehozó hatást próbálja gyengíteni. (**Lenz-törvénye**)

A Faraday-Lenz törvényben az indukált elektromotoros erőt kifejezve az **elektromos térerősség** zárt görbe mentén vett integráljával:



$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int_F \vec{B} \cdot d\vec{A}$$



Az elektromos térerősség integrálját a Stokes-tétel segítségével átalakítva felületi integrállá, majd állandó nagyon kicsi felületet véve egy pont körül megkapjuk a lokális alakot:

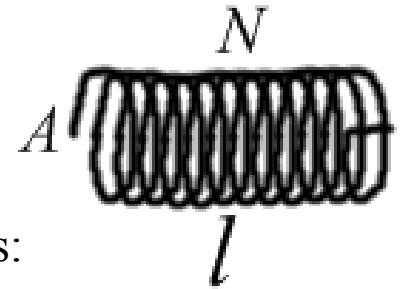
$$\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_F \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{A} = - \int_F \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \longrightarrow \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

A változó mágneses tér által indukált elektromos térerősség örvényes (**nem konzervatív**) és forrásmentes, míg a töltések által létrehozott elektromos tér forrásos és örvénymentes.

Szolenoid önindukciós együtthatója

Múlt előadáson láttuk, hogy hosszú egyenes tekercs esetén a mágneses térerősség és indukció:

$$H = \frac{NI}{l} \quad B = \frac{\mu NI}{l}$$



Az N menetes A keresztmetszetű tekercsre a mágneses indukciófluxus:

$$\Phi = BAN = \frac{\mu NI}{l} AN = \frac{\mu N^2 A}{l} I$$

Tehát a fluxus arányos az őt létrehozó árammal. Az arányossági tényező az **önindukciós együttható** (L):

$$\Phi = \frac{\mu N^2 A}{l} I = LI \quad L = \frac{\mu N^2 A}{l} \quad [L] = \frac{Vs}{A} = \text{H(Henry)}$$

A tekercsben indukálódott elektromotoros erő: $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$

Huroktörvény általánosítása változó áramra

A tekercsben indukálódott elektromotoros erő:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_F \vec{B} \cdot d\vec{A} = -L \frac{dI}{dt}$$

A tekercs L önindukciós együtthatója egyben a kör önindukciós együtthatója.

A kondenzátoron eső feszültség (g_2 görbe):

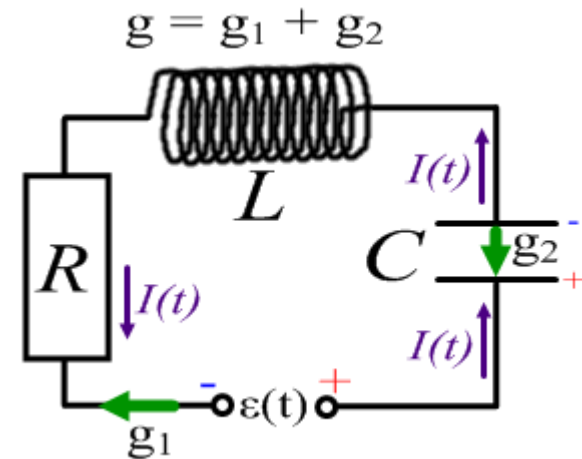
$$U = \frac{Q}{C}$$

A $g = g_1 + g_2$ zárt görbe mentén kiintegrálva az elektromos térerősséget (nem nulla, mert az indukált tér örvényes és nem konzervatív):

$$IR + \frac{Q}{C} - \varepsilon = \varepsilon_i$$

Tehát a huroktörvény általánosított egyenlete soros RLC körre:

$$IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon$$



Valamilyen t időben
 $I(t)$ áram folyik.

Az elektromágneses tér energiája *

Az elektromos tér energiasűrűsége: $w_E = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$

A mágneses tér energiasűrűsége: $w_M = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$

A tér egy adott pontjában az elektromos és mágneses terek együttes energiasűrűsége tehát (amennyiben mindkettő jelen van):

$$w_{EM} = \frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

A pont egy (elegendően) kicsiny ΔV térfogatú környezetében lévő energia:

$$\Delta W_{EM} = \frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \Delta V$$

Amennyiben az energiasűrűség nem homogén, egy véges térfogatban lévő energiát térfogati integrállal számolhatjuk:

$$W_{EM} = \frac{1}{2} \int_V (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}) dV$$

Ideális tekercs szinuszos váltakozó feszültségen *

A körre most is az általános huroktörvényt írjuk fel figyelembe véve hogy az elektromotoros erő most függ az időtől:

$$L \frac{dI}{dt} = \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$$

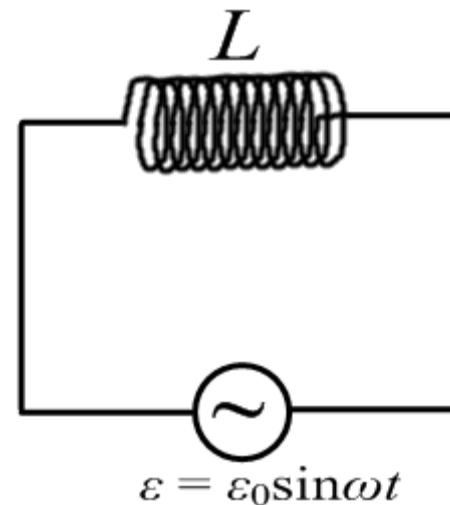
Átrendezve és az idő szerint kiintegrálva kapjuk:

$$I(t) = -\frac{\varepsilon_0}{L\omega} \cos \omega t = \frac{\varepsilon_0}{L\omega} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = I_0 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

A feszültség és az áramerősség maximális értékeinek hányadosára bevezetjük az induktív reaktanciát:

$$X_L = \frac{\varepsilon_0}{I_0} = L\omega$$

Az áramerősség továbbá $\pi/2$ fáziskésésben van a tekercsre kapcsolt feszültséghez képest.



Kondenzátor szinuszos váltakozó feszültségen *

A kondenzátor a váltakozó feszültség hatására periodikusan feltöltődik és kisül.

Az általános hurokegyenletet felírva:

$$\frac{Q}{C} = \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$$

Átrendezve és az idő szerint deriválva kapjuk az áramerősséget:

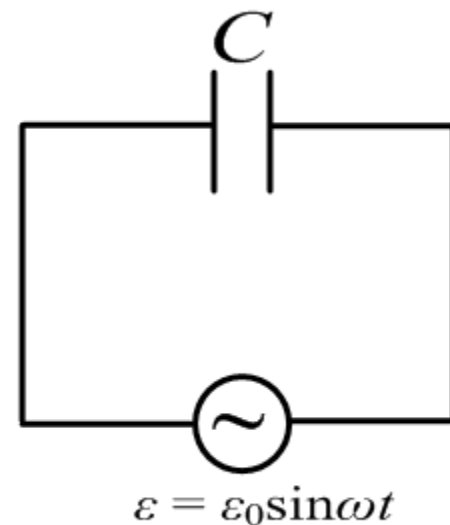
$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(C\varepsilon_0 \sin \omega t) = C\varepsilon_0 \omega \cos \omega t = I_0 \cos \omega t$$

A feszültség és az áramerősség maximális értékeinek hányadosára bevezetjük a kapacitív reaktanciát:

$$X_C = \frac{\varepsilon_0}{I_0} = \frac{1}{C\omega}$$

Az áramerősség továbbá $\pi/2$ fázissal siet a kondenzátorra kapcsolt feszültséghez képest:

$$I(t) = I_0 \cos \omega t = I_0 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$



Soros RLC kör gerjesztett elektromágneses rezgései

Felírva az általános huroktörvényt:

$$IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

Ez szerkezetét tekintve ugyanolyan mint a gerjesztett rezgés mozgásegyenlete:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + Dx = F_0 \cos \omega t$$

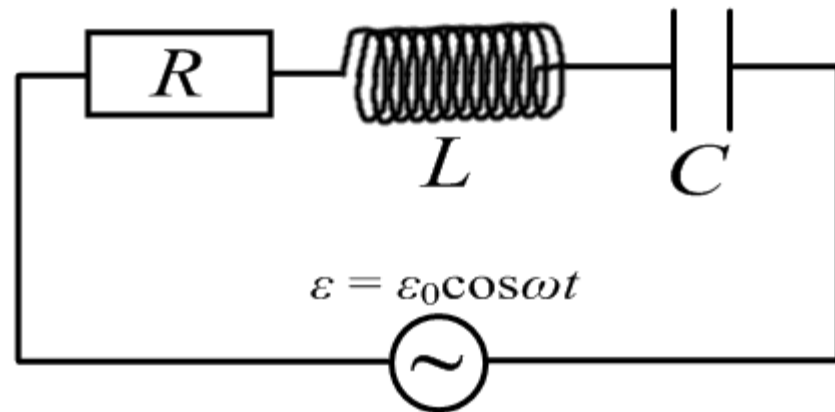
A megfelelő mennyiségek: $x \rightarrow Q$; $m \rightarrow L$ (tehetetlenség) ; $b \rightarrow R$ (csillapítás);
 $D \rightarrow 1/C$ (rúgóállandó)

rezonancia körfrekvencia: $\omega_r = \sqrt{\frac{D}{m}} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{LC}}$

[LÁSD VIDEÓ IDEKATTINVA!](#)

Lederiváljuk az eredeti egyenletet, hogy az áramerősségre kapjunk egy inhomogén másodrendű differenciálegyenletet:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -\varepsilon_0 \omega \sin \omega t$$



Soros RLC kör gerjesztett elektromágneses rezgései

Soros RLC körben az áramerősségre kaptuk: $L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -\varepsilon_0 \omega \sin \omega t$

Ennek megoldása az áramforrással megegyező frekvenciájú, de egy kezdőfázissal eltolt váltóáram:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

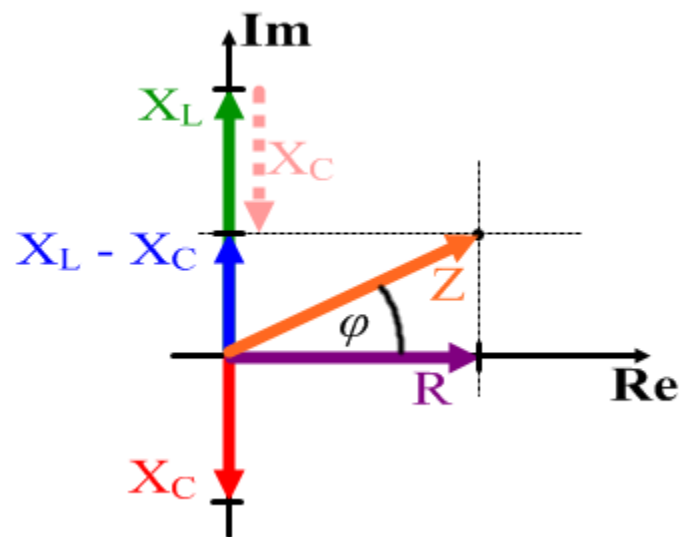
A feszültség és az áramerősség maximális értékeinek hányadosa az **impedancia** (Z).
Ezzel felírva az Ohm-törvény általános alakja váltóáramú körökre:

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{Z}$$

Az impedancia az áramkör váltóáramú „ellenállása”, amely tartalmazza a kapacitív és induktív reaktanciák járulékát is. Az impedancia és a fáziskésés kiszámítását segíti a különféle ellenállásokat a komplex síkban ábrázoló fázisábra. Ennek alapján:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\text{és } \operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad \text{vagy} \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z}$$



Rezonancia soros RLC körben

A kapacitív és az induktív reaktanciák függnek a frekvenciától, ezért az impedancia is frekvenciafüggő:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Amikor az impedancia minimális értéket vesz fel az áramerősség a lehető legnagyobb. Rezonancia frekvencia az a frekvencia amelynél az impedancia minimális és (áram)rezonancia lép fel. Látható, hogy ez akkor igaz amikor:

$$L\omega_r = \frac{1}{\omega_r C} \rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Látható, hogy ekkor a kondenzátor és a tekercs éppen kiejtik egymás hatását, tehát az áram fáziskésése nulla lesz, az impedancia pedig egyszerűen az ohmos ellenállással lesz egyenlő:

$$\operatorname{tg} \varphi_r = \frac{L\omega_r - \frac{1}{\omega_r C}}{R} = 0 \rightarrow \varphi_r = 0$$

$$Z_r = \sqrt{R^2 + (0)^2} = \sqrt{R^2} = R$$

Teljesítmény soros RLC körben

Az áramforrás pillanatnyi teljesítménye: $P(t) = \varepsilon(t)I(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t I_0 \cos(\omega t - \varphi)$

Ezt átalakítjuk trigonometrikus összefüggések felhasználásával:

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{cases} +$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} = \cos\alpha\cos\beta$$

Legyenek: $\alpha = \omega t$ és $\beta = \omega t - \varphi$ $\frac{\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi}{2} = \cos\omega t \cos(\omega t - \varphi)$

Tehát a pillanatnyi teljesítmény: $P(t) = \frac{\varepsilon_0 I_0}{2} [\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi]$

Példa: 21

Az átlagteljesítmény ennek az időátlaga, de az első tag egész periódusokra vett integrálja nulla. A második (konstans) tag időátlaga önmaga:

$$\bar{P} = \frac{\varepsilon_0 I_0}{2} \cos \varphi = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos \varphi = \varepsilon_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \frac{R}{Z} = I_{\text{eff}}^2 R \quad \text{ez rezonancia esetén a legnagyobb}$$

Ezt hívják P_h hatásos teljesítménynek. A $\cos \varphi = R/Z$ szorzó pedig a teljesítménytényező.

Látszólagos teljesítmény: $P_l = \varepsilon_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$ Meddő teljesítmény: $P_m = \varepsilon_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin \varphi$